الفصل الثالث المتسلسلات اللانهائية

تعريف

عرفنا فيما سبق أن المتتالية هي مجموعة مرتبة من الأعداد الحقيقية وفق قاعدة معينة ويفصل بين حدودها الإشارة (,) ولكن إذا استبدلنا إشارة (,) بإشارة الجمع (+) فإن المتتالية تسمى متسلسلة فمثلا: 2 ، 5 ، 8 ، . . . متتالية أما المجموع : 2 + 5 + 8 + . . . فيسمى متسلسلة وللتعبير عن هذا المجموع نستخدم رمزا خاصا يسمى $\sum$ (ويقرأ سيكما Sigma) .

المتسلسلة اللانهائية

المتسلسلة اللانهائية من الاعداد الحقيقية

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ **هي عبارة عن متتابعة اعداد حقيقية** $\{s_n\}$ **حيث ان :**

$s_1=a_1$

$s_2=a_1+a_2$

$s_3=a_1+a_2+a_3$

:

:

$s_n=a_1+a_2+a_3+.....+a_n$

تُسمى الاعداد a_1،a_2،a_3،.....،a_n حدود المتسلسلة والعدد الحقيقي s_n يُسمى بالمجموع الجزئي النوني للمتسلسلة.

سوف نرمز للمتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **بالرمز** $\sum a_n$ **(للاختصار)**

أمثلة :

(1) $\sum n = 1+2+3+4+.....$

(2) $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} .....$

(3) $\sum \frac{(-1)^n}{n^2} = -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + ...$

مثال : جد المتتابعة $\{S_n\}$ **للمتسلسلة اللانهائية** $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

الحل : لنأخذ $a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ فأن $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ اي ان $a_k = \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ وبتجزئة الكسور :

$$a_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2} = \frac{A(k+2)+B(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(A+B)k + 2A + B}{(k+1)(k+2)}$$

وبمساواة معاملات البسط للطرفين:

A+B=0 -------(1)

2A+B=1 ------(2)

وبحل المعادلتين انياً ، نطرح (1) من (2) :

من المعادلة (1) $A=-B$ $\quad \therefore A=1 \quad B=-1$

$$a_k = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-2}{2(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$$

اذن المتتابعة $\{S_n\} = \left\{\dfrac{n}{2(n+2)}\right\}$

المتسلسلة اعلاه تُسمى متسلسلة تلسكوبيه (Telescoping Series)

المتسلسلة التلسكوبية Convergent Sequence

هي المتسلسلة التي ليس لها صيغة عامة مثل متسلسلة القوى

(p-series) $\sum \dfrac{1}{n^p}$ **او المتسلسلة الهندسية** $\sum ar^{n-1}$ **والتي يمكن ايجاد مجموعها بطريقة تجزئة الكسور كما في المثال اعلاه.**

المتسلسلة المتقاربة Convergent Sequence

يُقال للمتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة اذا كانت متتابعة مجاميعها الجزئية متقاربة اي ان $\lim_{n\to\infty} S_n = S_0$ حيث ان s عدد حقيقي والا فهي متباعدة .

مثال : اثبت ان المتسلسلة $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ متقاربة ؟

الحل: من المثال اعلاه $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+2)} = \frac{1}{2}$

اذن المتسلسلة اللانهائية $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ متقاربة وان مجموعها يساوي $\frac{1}{2}$.

مثال : لتكن ..... $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$ جد المتتابعة $\{S_n\}$ للمتسلسلة اللانهائية $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ ؟

الحل: لنأخذ $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ فأن $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ اي ان $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(A+B)k+A}{k(k+1)}$$

وبمساواة معاملات البسط للطرفين:

A+B=0 -------(1)
A =1 ------(2)

وبحل المعادلتين انياً: **A=1 و B=-1**

$$a_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

<u>مثال</u> :

$$\sum\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+.....+\frac{1}{2^n}+.....$$

$$S_1=\frac{1}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=1-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{2^2}$$

$$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}=1-\frac{1}{8}=1-\frac{1}{2^3}$$

$$S_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}=\frac{15}{16}=1-\frac{1}{16}=1-\frac{1}{2^4}$$

$$\vdots$$

$$S_n=1-\frac{1}{2^n}$$

اي ان متتابعة المجاميع الجزئية $\{s_n\}=\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}.\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$$

بما ان متتابعة المجاميع الجزئية متقاربة اذن المتسلسلة $\sum\frac{1}{2^n}$ **متقاربة.**

<u>ملاحظة</u>: يُقال للمتسلسلة $\sum a_n$ **بأنها متباعدة اذا كانت** $\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$ **فأنها تتباعد الى (+∞) وتكتب** $\sum S_n=\infty$ **وبالمثل ، اذا كانت** $\lim_{n\to+\infty}s_n=-\infty$ **، يُقال للمتسلسلة بأنها تتباعد الى (-∞) وتكتب** $\sum S_n=-\infty$ **.**

مثال : المتسلسلة ..... $\sum(-1)^{n+1}=1-1+1-1+1-1+.....$

وهكذا نجد ان $S_1=1 \quad , \quad S_2=1-1=0 \quad , \quad S_3=1-1+1=1 \quad , \quad S_4=1-1+1-1=0 \quad ,.....$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ غير موجودة والمتسلسلة متباعدة (ولكن ليس الى ∞ او $-\infty$) .

مثال : المتسلسلة ..... $\sum n=1+2+3+4+.....$

$S_1=1 \;,\; S_2=1+2 \;,\; S_3=1+2+3 \;,\; S_n=1+2+3+4+.....+n$

$2S_n=2+4+6+8.....+2n$

$2S_n=n(n+1)$

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n^2+n)=\infty$$

$\therefore \quad \sum n$ متباعدة

مثال : المتسلسلة $\sum\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+......$ تُسمى متسلسلة توافقية (Harmonic) لاحظ المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة :

$$S_2=1+\frac{1}{2}$$

$$S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{2}{2}\to S_4>1+\frac{2}{2}$$

$$S_8=S_4+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>S_4+\frac{1}{2}>1+\frac{3}{2}$$

$$S_{16}=S_8+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>S_8+\frac{8}{16}=S_8+\frac{1}{2}$$

$$S_{16}>1+\frac{4}{2}$$

$$\vdots$$

$$S_{2^k}>1+\frac{k}{2} \quad ; \quad k>1$$

اذن $\lim S_n=\infty \leftarrow$ المتسلسلة $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة لكن $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

المتسلسلة الهندسية Geometric Series

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ... + ar^n + ...$ **حيث ان a≠0 تسمى هذه المتسلسلة بالمتسلسلة الهندسية ويطلق على r اساس المتسلسلة و a الحد الاول فيها.**

مبرهنة

تكون المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ **متقاربة عندما |r|<1 ومجموعها هو** $\frac{a}{1-r}$ **ومتباعدة عندما |r|≥1 حيث ان a≠0 .**

البرهان : بما ان $S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ar^n$$

بالطرح $S_n - rS_n = a - ar^n$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

الان اذا كان $|r| < 1 \Leftarrow -1 < r < 1$

فأن $\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \Leftarrow$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

اذن المتسلسلة متقاربة.

اذا كانت $|r| > 1 \Leftarrow r > 1$ **او r<-1 فأن** $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

واذا كانت r=1 فأن $S_n = na$ **و** $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

اذن المتسلسلة متباعدة عندما |r|≥1

مثال : هل ان المتسلسلة $\sum \frac{2^{n-1}}{3^n}$ **متقاربة ؟**

الحل : $\sum \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{8}{3^4} + ...$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + ...$$

المتسلسلة هندسية فيها $a = \frac{1}{3}$ **و** $r = \frac{2}{3} < 1$

اذن حسب المبرهنة اعلاه المتسلسلة $\sum \frac{2^{n-1}}{3^n}$ متقاربة .

<u>مثال</u> : هل ان المتسلسلة .....0.2222 متقاربة ؟
<u>الحل</u> : يمكن كتابة العدد .....0.2222 بالشكل :

$$0.2222.....=0.2+0.02+0.002+0.0002+.....$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\frac{2}{10000}+.....$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{2}{10^4}+.....$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{2}{10}\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{2}{10}\left(\frac{1}{10^2}\right)+\frac{2}{10}\left(\frac{1}{10^3}\right)+.....$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{2}{10}\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{2}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{2}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^3+......$$

بما ان المتسلسلة هندسية فيها $a=\frac{2}{10}$ و $r=\frac{1}{10}<1$
اذن حسب المبرهنة اعلاه المتسلسلة متقاربة .

<u>المتسلسلة الموجبة الحدود</u>

يُقال ان المتسلسلة اللانهائية $\sum a_n$ موجبة الحدود اذا كان $a_n>0$ لكل n.

<u>المتسلسلة المتذبذبة Alternative Sequence</u>

يُقال للمتسلسلة اللانهائية $\sum(-1)^{n+1}a_n = a_1-a_2+a_3-a_4+.....$ بأنها متذبذبة اذا كان $a_n>0$ لكل n .

<u>15 اختبارات التقارب Test Of Convergence</u>

الاختبارات التالية يمكن بواسطتها معرفة فيما اذا كانت بعض المتسلسلات اللانهائية متقاربة او متباعدة دون اللجوء الى التعاريف السابقة.

<u>اختبار القوى Power Test</u>

المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^p}$ تدعى متسلسلة القوى وتكون :

أ) متقاربة (Convergent) اذا كان $p>1$
ب) متباعدة (divergent) اذا كان $p\leq 1$

<u>مثال</u> : $\sum \frac{1}{n}$

هنا p=1 اذن $\sum \frac{1}{n}$ **متباعدة حسب الاختبار p**

<u>مثال</u> : $\sum \frac{1}{\sqrt{n^3}}$

هنا $\sum \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$p = \frac{3}{2} > 1 \leftarrow \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ **متقاربة .**

<u>مثال</u> : $\sum \frac{1}{n^3}$ **متقاربة لان p=3>1**

<u>اختبار المقارنة Comparison Test</u>

لتكن المتسلسلة $\sum u_n$ **موجبة فأن :**

أ) اذا كانت المتسلسلة $\sum v_n$ **معلومة متقاربة وكان** $\sum u_n \le \sum v_n$ **فأن** $\sum u_n$ **متقاربة .**

<u>مثال</u> : $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

<u>الحل</u>: **n(n+1)=n^2+n**

n^2+n>n^2

$$\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2} \rightarrow \sum \frac{1}{n^2+1} < \sum \frac{1}{n^2}$$

بما ان $\sum \frac{1}{n^2}$ **متسلسلة متقاربة حسب اختبار p**

فأن $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ **متقاربة حسب اختبار المقارنة**

<u>مثال</u> : $\sum \frac{1}{n^2+2}$

<u>الحل</u> : **n^2+2>n^2**

$$\frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2} \rightarrow \sum \frac{1}{n^2+1} < \sum \frac{1}{n^2}$$

المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة حسب اختبار p فأن $\sum \frac{1}{n^2+2}$ متقاربة حسب اختبار المقارنة .

ب) اذا كانت المتسلسلة $\sum v_n$ متباعدة وكان $\sum u_n \geq \sum v_n$ فأن $\sum u_n$ متباعدة .

<u>مثال</u> : اختبر تقارب المتسلسلة $\sum \frac{1}{n+10}$

n+10≤11n $\rightarrow \frac{1}{n+10} \geq \frac{1}{11n}$

$$\sum \frac{1}{n+10} \geq \frac{1}{11} \sum \frac{1}{n}$$

المتسلسلة $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة حسب اختبار p اذن $\sum \frac{1}{n+10}$ متباعدة حسب اختبار المقارنة .

<u>مثال</u> : $\sum \frac{1}{3n-2}$

$$\sum \frac{1}{3n-2} = \frac{1}{3} \sum \frac{1}{n-\frac{2}{3}}$$

$$n-\frac{2}{3} \leq n \rightarrow \frac{1}{n-\frac{2}{3}} \geq \frac{1}{n}$$

$$\sum \frac{1}{n-\frac{2}{3}} \geq \sum \frac{1}{n}$$

المتسلسلة $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة حسب اختبار p اذن المتسلسلة $\sum \frac{1}{3n-2}$ متباعدة حسب اختبار المقارنة .

<u>مثال</u> : $\sum \frac{\ln n}{2n^3-1}$

ln n<n ________ (1)

$2n^3-1>n^3$; n≥1

$\frac{1}{2n^3-1} < \frac{1}{n^3}$ **_______(2)**

نضرب العلاقة (1) في العلاقة (2)

$$\frac{\ln n}{2n^3-1} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

$$\sum \frac{\ln n}{2n^3-1} < \sum \frac{1}{n^2}$$

المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة حسب اختبار **p** اذن $\sum \frac{\ln n}{2n^3 - 1}$ متقاربة حسب اختبار المقارنة
.

مثال : $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

$$\mathbf{Ln\ n < n}$$

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \to \sum \frac{1}{\ln n} > \sum \frac{1}{n}$$

المتسلسلة $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة حسب اختبار **p** فأن $\sum \frac{1}{\ln n}$ متباعدة حسب اختبار المقارنة .

مثال : برهن على ان المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^n}$ متقاربة ؟

الحل : $\sum \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + ...$ لتكن $U_n = \frac{1}{n^n}$ و $V_n = \frac{1}{2^n}$

$$n^n > 2^n \quad ; \quad \forall n > 2$$

$$\frac{1}{n^n} > \frac{1}{2^n} \to \sum \frac{1}{n^n} < \sum \frac{1}{2^n}$$

وبما ان المتسلسلة $\sum \frac{1}{2^n}$ هندسية فيها **a=**$\frac{1}{2}$ و $r = \frac{1}{2} < 1$ اي ان $\sum \frac{1}{2^n}$ متقاربة

اذن $\sum \frac{1}{n^n}$ متقاربة.

مثال : هل ان المتسلسلة $\sum \frac{1}{n!}$ متقاربة ؟

الحل : $\sum \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$

$$U_n = \frac{1}{n!} = \frac{1}{1.2.3......n}$$

$$n! > 2^{n-1} \to \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

وبما ان $\sum \frac{1}{2^{n-1}}$ هندسية فيها $r = \frac{1}{2} < 1$ فهي متقاربة

اذن $\sum \frac{1}{n!}$ متقاربة حسب اختبار المقارنة .

<u>اختبار التكامل Integral Test</u>

لنفرض $u_n=f(x)$ وان :

<u>مثال</u> : $\sum \frac{1}{n+10}$ **لتكن** $f(x)=\frac{1}{x+10}$

(1) f(x) مستمرة لكل x≥1

(2) f(x) موجبة

$$\int_1^\infty f(x)dx=\int_1^\infty \frac{dx}{x+10}=\ln|(x+10)|]_1^\infty=\ln\infty-\ln 11=\infty$$

اذن المتسلسلة $\sum \frac{1}{n+10}$ **متباعدة .**

<u>مثال</u> : $\sum \frac{\ln n}{n}$ **لتكن** $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

(1) f(x) مستمرة لكل x≥1

(2) f(x) موجبة

$$\int_1^\infty f(x)dx=\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}dx=\frac{(\ln x)^2}{2}\Big]_1^\infty=\infty$$

اذن $\sum \frac{\ln n}{n}$ **متباعدة حسب اختبار التكامل**

<u>مثال</u> : $\sum \frac{1}{n\ln n}$ **لتكن** $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$

الدالة اعلاه مستمرة لكل x≥2

$$\therefore \int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}=\ln|\ln x|\Big]_2^\infty=\infty$$

اذن المتسلسلة $\sum \frac{1}{n\ln n}$ **متباعدة حسب اختبار التكامل**

<u>مثال</u> : بين فيما اذا كانت المتسلسلة $\sum ne^{-n}$ **متقاربة ؟**

الحل : لتكن $f(x)=xe^{-x}$ **لكل x≥1**

(1) f(x) مستمرة لكل x≥1

(2) F(x)>0 موجبة

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} xe^{-x}dx$$

باستخدام التكامل بالتجزئة (by part)

$$u = x \quad \to du = dx$$

$$e^{-x}dx = dv \quad \to -e^{-x} = v$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

$$\therefore \int_1^{\infty} xe^{-x} = \lim_{b\to\infty}\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}(x+1)\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-(b+1)}{e^{+b}} + \frac{2}{e}\right] = \frac{2}{e}$$

اذن المتسلسلة $\sum ne^{-n}$ **متقاربة .**

<u>اختبار المتسلسلة المتذبذبة Alternating Series Test</u>

المتسلسلة المتذبذبة $\sum(-1)^n a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n-1}a_n + ...$

$a_n>0$ **, والتي يمكن كتابتها بالشكل**

$$a_n = (-1)^n b_n \quad , b_n \geq 0$$

$$a_n = (-1)^{n+1} b_n \quad , b_n \geq 0$$

المتسلسلة $\sum a_n$ **تكون متقاربة اذا كان :**

(1) $b_{n+1} \leq b_n \ , \forall n$ **(2)** $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

<u>التقارب المطلق والتقارب الشرطي Absolut Convergence and Conditional Convergence</u>

يقال للمتسلسلة $\sum a_n$ **بأنها متقاربة مطلقة عندما تكون المتسلسلة** $\sum |a_n|$ **متقاربة.**

ويقال ان المتسلسلة $\sum a_n$ **متقاربة شرطية عندما تكون** $\sum |a_n|$ **متباعدة .**

<u>مثال</u> : المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ متقاربة حسب المثال السابق

وبما ان $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ = $\sum |a_n|$

$\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ **متباعدة حسب اختبار P لان ($1 > \frac{1}{2}$=p)**

اذن المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ متقاربة تقارباً شرطياً

<u>مثال</u> : اختبر تقارب المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ ؟

<u>الحل</u> : ليكن $a_n = \frac{1}{n^2}$ **فأن** $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n+1)^2} \leftarrow \mathbf{a_{n+1} < a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

اي ان المتسلسلة المتذبذبة متقاربة ولاختبار نوع التقارب

$\sum \frac{1}{n^2}$ = $\sum |a_n|$

المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة حسب اختبار p (1<2=p).

اذن المتسلسلة المتذبذبة متقاربة تقارب مطلق .

<u>اختبار النسبة Ratio Test</u>

في المتسلسلة $\sum a_n$ اذا كان $a_n \neq 0$ لكل قيم و $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ فأن

(1) اذا كان $\rho < 1$ فأن $\sum a_n$ متقاربة مطلقة.

(2) اذا كان $\rho > 1$ فأن $\sum a_n$ متباعدة .

(3) اذا كان $\rho = 1$ فأن الاختبار يفشل .

<u>مثال</u> : اختبر تقارب المتسلسلة $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} - \frac{1}{4.2^4} + ...$

<u>الحل</u> : يمكن كتابة المتسلسلة بالشكل $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n.2^n}$

نستخدم اختبار النسبة

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad , \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)2^{n+1}} \; ; a_n = \frac{(1-)^{n+1}}{n.2^n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)2^{n+1}} - \frac{n.2^n}{(-1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-n}{2(n+1)}\right| = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

اذن المتسلسلة متقاربة مطلقة .

<u>مثال</u> : $\sum \frac{(-1)^{n+1} n^3}{(n+1)!}$

<u>الحل</u> : نطبق اختبار النسبة

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}(n+1)^3}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(-1)^{n+1}.n^3}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-(n+1)^3}{(n+2)(n+1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n^3}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\right|\left|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}\right| = 0 < 1$$

اذن المتسلسلة متقاربة مطلقة .

<u>مثال</u> : اختبر تقارب متسلسلة $\sum \frac{2^n}{n^2}$

<u>الحل</u> : باستخدام اختبار النسبة

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{2^n}\right|$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right| = 2 > 1$$

اذن المتسلسلة متباعدة .

<u>مثال</u> : $\sum \frac{1}{n^2}$

<u>الحل</u> : باستخدام اختبار النسبة

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^2}.n^2\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$$

يفشل الاختبار .

اذن نستخدم اخر وليكن اختبار **P.**

$\sum \frac{1}{n^2}$ **متقاربة لان (p=2>1)**

<u>مثال</u> : هل ان المتسلسلة $\sum (-1)^{n+1} \frac{n^2}{3^n}$ **متقاربة ؟**

<u>الحل</u> : $|a_{n+1}| = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}, |a_n| = \frac{n^2}{3^n}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} \right| = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \right| = \frac{1}{3} < 1$$

اذن المتسلسلة متقاربة مطلقة .

<u>اختبار الجذر Root Test</u>

لتكن $\sum a_n$ **اي متسلسلة وان** $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ **فأن** $\sum a_n$ **تكون :**

(1) متقاربة مطلقة اذا كان L<1

(2) متباعدة اذا كان L>1 او L=∞

(3) يفشل الاختبار اذا كان L=1

<u>مثال</u> : المتسلسلة $\sum \frac{2^{2n}}{n^n}$

<u>الحل</u> : $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0 < 1$

اذن المتسلسلة $\sum \frac{2^{2n}}{n^n}$ **متقاربة مطلقة**

<u>مثال</u> : $\sum (n+1)^n$

<u>الحل</u> :باستخدام اختبار الجذر

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty > 1$$

اذن المتسلسلة متباعدة

<u>مثال</u> : اختبر تقارب المتسلسلة $\sum \frac{n!(-1)^{n-1}}{1.3.5.....(2n-1)}$

<u>الحل</u> : باستخدام اختبار النسبة

$$\boldsymbol{\rho} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(-1)^n}{3.5.7.....(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{1.3.5.....(2n-1)}{n!(-1)^{n-1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2n+1}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

اذن المتسلسلة متقاربة مطلقة .

<u>مثال</u> : المتسلسلة $\frac{1}{3} - \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} - \frac{4!}{3^4} + ...$

<u>الحل</u> : يمكن كتابة المتسلسلة بالشكل $\sum \frac{n!}{3^n}$

وباستخدام اختبار النسبة

$$\boldsymbol{\rho} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n!}\right| = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty > 1$$

اذن المتسلسلة متباعدة .