23

# دراسة توبولوجية لفضاء المتتابعات الثنائية

أبو فراس محمد جواد الموسوي

كلية التربية – جامعة البصرة

**الملخص:**

حاولنا أن نقدم دراسة ولو كانت بسيطة للصفات التوبولوجية لفضاء المتتابعات الانهائية المزدوجة (المتتابعات الثنائية) $X(S)$ فبدأنا بالحديث عن الفضاء $S^{\infty}$ (وهو فضاء الضرب لمجموعة منتهية في نفسها لمرات غير منتهية ومن الجهتين) ثم بينا أن $X(S)$ فضاءا توبولوجيا من تعريف جديد من المجموعات أسميناه بالحزم أو الحزم النونية وهي أوسع من الأسطوانة المعرفة في [B] ( أي أن الحزمة تحوي الأسطوانة) و ايضا تكون الحزم قاعدة لـ $X(S)$ والحزم الأحادية قاعدة جزئية له ثم بينا أن فضاء المتتابعات الثنائية مكافىء توبولوجيا لفضاء $S^{\infty}$.وعرفنا مجموعات جزئية من $X(S)$ وبينا متى تكون مغلقة أو مفتوحة . وناقشنا موقع الفضاء من مسلمات الفصل ثم تناولنا التراص والإتصال.

**Abstract :**

We attempted to introduce a study ,although parliamentary, for topological properties of the space of doubly infinitely sequences (bisequences space) $X(S)$ .We started talking about the space $S^{\infty}$ (the product space of finite space by itself tow-sided infinitely times). And we show that $X(S)$ is Topological space by new definition of set we call it bundle or n- bundle and it's more extension than cylinder set which defined in [B] (that is bundle contained cylinder) and n-bundle is a base of $X(S)$ also and ١-bundle is a sub base of it . Also we showed that $X(S)$ is a topological equivalent (homeomorphic) to the space $S^{\infty}$. And we defined a subsets of $X(S)$ and showed when will be close or open .Finally we discussed the position of a space from separation axioms and we studied compactness and connectedness

**مقدمة**

تعنى الديناميكا الرمزية بداراسة السيل الرمزي وهو حالة خاصة من زمرة التحويل التوبولوجي التي تتألف من فضاء توبولوجي $X$ يعرف بفضاء الطور و زمرة توبولوجية $G$ تعرف بزمرة الطور و $\pi$ دالة مستمرة من $X \times G \longrightarrow X$ تسمى الفعل يتحقق عليهما شرطان آخران [ط ] .

و هنالك حالات خاصة من زمرة التحويل التوبولوجي كالسيل المفرق والسيل المستمر والنظام الديناميكي[ط ]و النظام الديناميكي المفرق و النظام الديناميكي المستمر[و ].

و في الديناميكا التوبولوجية أي هوميومورفيزم $h$ من فضاء الطور للفضاء ذاته



JOURNAL OF COLLEGE OF ............ N0.3

( $X \longrightarrow X$ :$h$) يعرف سيلا مفرقا يرمز له بالرمز ($X , h$) [**ط** ] .

هناك دالة $S \longrightarrow Z$ :$x$ من مجموعة الأعداد الصحيحة $Z$ للأبجدية $S$ تعرف بالمتتابعة الثنائية **[H]** أو المتتابعة الانهائية المزدوجة **[B]** . و يرمز لمجموعة كل المتتابعات الثنائية المعرفة على مجموعة الرموز $S$ بالرمز $X(S)$ **[H]** .وهو فضاء توبولوجي(كما بينا في هذه الورقة) مكافىء لفضاء الضرب على المجموعة

$$S^{\infty} = \ldots \times S \times S \times S \times \ldots$$

حيث التبولوجي المعرف على المجموعة المنتهية $S$ هو التبولوجي المفرق[**و** ](وبينا بالتفصيل أن توبولوجي $S^{\infty}$ لا يكون مفرقا كما بين في [**و** ] و [**ط**]).مواصفات الفضاء لا تتغير بزيادة عدد عناصر $S$ ونقصانها ما دامت $S$ منتهية. فاعتبرت بعض البحوث $S$={٠،١} دون فقدان أي تعميم **[CHR]**.بينما بينت أدبيات أخرى توبولوجية $S^{\infty}$ على أساس $S$ مجموعة نونية العناصر **[B]**.

وهناك دالة $\sigma: X(S) \longrightarrow X(S)$ تعرف بدالة النقلة تقوم بنقل كل عنصر بالمتتابعة موقع واحد بجهة اليسار أي أن $[\sigma(x)]_i = x_{i+1}$ و دالة النقلة هي هوميومورفيزم[**ط** ] .فيكون ($X(S)$ , $\sigma$) سيلا مفرقا يعرف بالسيل الرمزي أو تام النقلة وهو نظام ديناميكي مفرق (فقد بينا كيف يكون $X(S)$ فضاءا متريا).

إكتفت الكثير من المصادر بالقول بأن الفضائين $S^{\infty}$ و $X(S)$ متكافئين تبولوجيا (هوميومورفيك) وبينوا مترية الفضاء $X(S)$ وقد عرفت عليه دالة مسافة مع تسمية بعض الصفات التوبولوجية فمنهم من أشار أن الفضاء $X(S)$ مرصوص تام غير متصل كليا **[H]**. ومنهم من وضح بسطور أن الفضاء $S^{\infty}$ ليس مفرقا[**ط**](وكذلك [**و**] مع إضافة تعريف الإسطوانة) ومنهم من عرف نوع من المجموعات في الفضاء $X(S)$ تعرف بالإسطوانة **[B]**. و لم يتم التطرق إلى الكثير من الصفات والخواص التوبولوحية للفضاء $X(S)$ في المصادر لذلك حاولنا دراسة الصفات التوبولوحية لفضاء المتتابعات الثنائية $X(S)$ .

قد بينا منشاء الفضاء $S^{\infty}$ بشكل أكثر تفصيلا وكيف يكون فضاءا توبولوجيا مقارنة مع الفضاءات $S^k$ إبتداءا من $k$ =٢ ومرورا بـ $k = n$ لأي عدد طبيعي $n$>٢ وإنتهاءا بالفضاء $T^{\infty} = T\times T\times T\times T\times T\times\ldots$

في البدء إفترضنا أن $S$ مجموعة تتألف من عنصرين ثم إفترضنا $S$ مجموعة تتألف من $n$ من العناصر.

و وسعنا الإسطوانة إلى مجموعة متتابعات صور $n$ من العناصر في مواقع متفرقة تكون واحدة في جميع المتتابعات في المجموعة وأطلقنا على هذا النوع من المجموعة بالحزمة نونية العناصر وعرفنا الفضاء $X(S)$ على أساس الحزم نونية العناصر تكون قاعدة له والحزم الأحادية تكون قاعدة جزئية له .

وأثبتنا أن $X(S)$ مكافيء للفضاء $S^{\infty}$ بتعريف دالة أثبتت أنها هوميومورفيزم بإستخدام صور القاعدة و القاعدة الجزئية. ثم تطرقنا للمجموعات المغلقة والمفتوحة في $X(S)$ وعرفنا مجموعات جزئية من $X(S)$ لها صفات خاصة بينا ايهما مغلق وايهما مفتوح وأيهما لامغلق ولا مفتوح وبينا انغلاق وداخل و النقاط الحدودية و نقاط الغاية لتلك المجموعات .

ومن بعدها تناولنا موضوع موقع الفضاء $X(S)$ في مسلمات الفصل وبينا كيف يكون $X(S)$ فضاءا متريا مشيرين لدالتي المسافة المعرفتين عليه في **[H]** و **[B]** وعلى الرغم من أن العديد من المصادر أشارت إلى أن هذا الفضاء متريا إلا أننا بينا أنه من نوع $T_{٢},T_{١},T.$ (وأكتفينا بذلك) وأشرنا إلى أنه فضاءا مرصوصا فيكون فضاءا متريا مرصوصا وغير متصل وأثبتنا ذلك .

**تمهيد**

على الرغم من أن العديد من المصادر تفترض أن $S=\{٠،١\}$ دون الإخلال في أي تعميم لكون الصفات التوبولوجية لا تتغير بزيادة عدد عناصر $S$ المنتهي وذلك عند الحديث عن الصفات التوبولوجية لـ $S^{\infty}$ إلا أننا سنبين ذلك للمجموعة $S$ مهما زاد عدد عناصرها عن عنصر واحد (اثنين أو أكثر) ولكننا سنبدأ من الفضاء $S^{٢}$ (حيث $S$ تتألف من عنصرين) ومن ثم نناقش التغير أن ازداد عدد عناصر $S$ عن ٢ والفضاء $S^{n}$ ثم $S^{\infty}$

**لنفرض أن $S=\{٠،١\}$ ودالة الإسقاط $P : S \times S \longrightarrow S$ تعرف بما يأتي**

$P_{\circ}(٠،٠) = P_{١}(٠،٠) = \{٠\}$ $\qquad$ $P_{\circ}(٠،١) = P_{١}(١،٠) = \{٠\}$

$P_{\circ}(١،٠) = P_{١}(٠،١) = \{١\}$ $\qquad$ $P_{\circ}(١،١) = P_{\circ}(١،١) = \{١\}$

**نعرف التوبولوجي المفرق على $S$ وتوبولوجي الضرب هو المعرف على $S^{n}$ أو $S^{\infty}$ نلاحظ أن .**

$$P_{\circ}^{-1}(\{٠\}) = \{(٠،٠),(٠،١)\}=\{٠\} \times S \qquad P_{\circ}^{-1}(\{١\}) = \{(١،٠),(١،١)\}= \{١\} \times S$$

$$P_{1}^{-1}(\{٠\}) = \{(٠،٠),(١،٠)\}=S \times \{٠\} \qquad P_{1}^{-1}(\{١\}) = \{(٠،١),(١،١)\}= S \times \{١\}$$

و على فرض أن $S = \{a_\circ, a_١, \ldots, a_{r-١}\}$ ستكون

$$P_\circ^{-1}(\{b\}) = \{b\} \times S\ ,\quad P_1^{-1}(\{b\}) = S \times \{b\} (\forall b \in S)$$

العناصر أعلاه مع $\varnothing$ و $S^٢$ تمثل عناصر القاعدة الجزئية لتوبولوجي الضرب.

من الآن فصاعداً سنفترض أن $S = \{a_\circ, a_١, \ldots, a_{r-١}\}$ و أن $a$ هو أي رمز في $S$ علما أن التوبولوجي المعرف على $S$ هو التوبولوجي المفرق . سنناقش الفضاء $S^٣ = \times S \times S$ حيث تتكون عناصر قاعدته الجزئية لتوبولوجي الضرب من $S$

$$P_i^{-1}(\varnothing) = \varnothing \qquad\qquad P_i^{-1}(S) = S^٣$$

$$P_\circ^{-1}(\{a\}) = \{a\} \times S^٢ \qquad P_1^{-1}(\{a\}) = S \times \{a\} \times S \qquad P_2^{-1}(\{a\}) = S^٢ \times \{a\}$$

و عناصر القاعدة الجزئية للفضاء $S^n = S \times S \ldots \times S$ هي

$$P_i^{-1}(\varnothing) = \varnothing \quad P_i^{-1}(S) = S^n \quad P_\circ^{-1}(\{a\}) = \{a\} \times S^{n-١} \quad P_n^{-1}(\{a\}) = S^{n-١} \times \{a\}$$

$$P_i^{-1}(\{a\}) = S \times \ldots \times \underset{i-1}{S} \times \underset{i}{\{a\}} \times \underset{i+1}{S} \ldots \times S \qquad i = ٢, ٣, \ldots, n-١\ , a \in S$$

التوبولوجي المعرف على $S^k$ $(k = ٢, ٣, \ldots n)$ هو توبولوجي الضرب ويكون مفرقاً لأنه توبولوجي حاصل الضرب المنتهي لتوبولوجيات مفرقة لأن كل مجموعة مفردة ستكون في قاعدة هذا الفضاء فالمجموعتان

$\{a\} \times S\ , S \times \{b\}$ من مجاميع القاعدة الجزئية و تقاطعهما تمثله المجموعة المفردة $\{a\} \times S \cap S \times \{b\} = \{a\} \times \{b\} = \{(a, b)\}$ وهي عنصر في القاعدة لتوبولوجي الضرب على $S^٢$ و كذلك $\{a\} \times S^٢ \cap S \times \{b\} \times S \cap S^٢ \times \{c\} = \{a\} \times \{b\} \times \{c\} = \{(a, b, c)\}$ هي مجموعة مفردة وهي عنصر في القاعدة لتوبولوجي الضرب لـ $S^٣$ و ايضاً

$$\{a_\circ\} \times S^{n-١} \cap S \times \{a_١\} \times S^{n-٢} \cap \ldots S \times S \ldots \times \{a_k\} \times \ldots \times S \cap \ldots S^{n-١} \times \{a_{n-١}\} =$$

$$\{a_\circ\} \times \{a_١\} \ldots \times \{a_k\} \times \ldots \times \{a_{n-١}\} = \{(a_\circ, a_١, \ldots, a_k, \ldots, a_{n-١})\}$$

هي مجموعة مفردة وهي عنصر في القاعدة لتوبولوجي الضرب على $S^n$

الان نناقش الفضاء $S^\infty$ وهناك نوعين من هذا الفضاء النوع الاول ولنرمز له بالرمز $T^\infty$ وهو الفضاء

$$T^\infty = T \times T \times T \times \ldots$$

وسنتناول منشأه فقط وسندرس النوع الثاني بالتفصيل لأنه اعم من الأول وعلى الأرجح أنهم لا يختلفون في الصفات التوبولوجية (في معظم الأحيان) وهو الفضاء

$$S^\infty = \ldots \times S \times S \times S \times \ldots$$

بالنسبة للفضاء $T^{\infty}$ عناصر قاعدته الجزئية

$P_i^{-1}(T) = T^{\infty} \quad P_i^{-1}(\varnothing) = \varnothing \quad P_{\circ}^{-1}(\{a\}) = \{a\} \times T \times T \ldots$

$P_i^{-1}(\{a\}) = T \times \ldots \times T \times \{a\} \times T \ldots \times T \ldots \qquad a \in S$

$P_i^{-1}(\{a\})$ مجموعة كل العناصر التي يكون كل واحد فيها عبارة عن نقطة فيها العنصر ذو الموقع $i$ هو $a$

مثلاً لو كانت $S = \{٠, ١, ٢\}$ تكون $(\overset{0}{1},\ldots, \overset{i-2}{0}, \overset{i-1}{1}, \overset{i}{1}, \overset{i+1}{2}, \ldots)$ نقطة في $P_i^{-1}(\{١\})$

أما بالنسبة لعناصر القاعدة من الواضح أن

$P_i^{-1}(\{a\}) \cap P_i^{-1}(\{a\}) = P_i^{-1}(\{a\})$ وأن $P_i^{-1}(\{a\}) \cap P_i^{-1}(\{b\}) = \varnothing \ (a \neq b, a, b \in T)$

لنفرض أن $P_i^{-1}(\{a\}) \cap P_i^{-1}(\{a\}) = B \ (i \neq j)$

نلاحظ أن $\text{card } B = \infty$ أي عدد عناصر $B$ غير منتهي مثلا لو كانت $T = \{٠،١،٢،٣،٤\}$ تكون

$P_{\circ}^{-1}\{٣\} = \{٣\} \times T \times T \times T \times T \times T \times \ldots \quad P_3^{-1}\{١\} = T \times T \times \{١\} \times T \times T \times T \ldots$

لنتأمل النقاط $(٣،٤،١،١،٠،٢،٣,\ldots)$ , $(٣،٣،١،٤،٠،١،٠،٠،٠,\ldots)$ , $(٣،٢،١،٠،١،٣،٤,\ldots)$ ,

$(٣،٠،١،٢،٤،٠،٠،٢،٣،٠,\ldots)$ , $(٣،١،١،١،٢،٠،٣،٤,\ldots)$ , $(٣،٠،١،١،٤،٣،٢،٠،١,\ldots)$ ,

$(٣, ٠, ١, ٢, ١, ٤, ١, ٢, \ldots)$ , $(٣, ٤, ١, ٢, ٠, ١, ٣, ١, \ldots)$

النقاط أعلاه تنتمي إلى $P_{\circ}^{-1}(\{٣\}) \cap P_3^{-1}(\{١\})$ وهناك عدد غير منتهي من النقاط طالما أن إحداثيات غير منتهية من جهة واحدة ولا يمكن أن يكون التقاطع مجموعة مفردة فلا يكون الفضاء أعلاه مفرقا .

الآن لنتناول الفضاء $\ldots \times S \times S \times S \times \ldots = S^{\infty}$ حيث $S = \{c_{\circ}, c_1, \ldots, c_{n-1}\}$

عناصر القاعدة الجزئية فيه $P_i^{-1}(S) = \ldots \times S \times S \times S \times \ldots = S^{\infty} \qquad P_i^{-1}(\varnothing) = \varnothing$

$P_i^{-1}(\{c_k\}) = \ldots \times S \times S \times \{c_k\} \times S \times S \times S \times \ldots \quad , \quad k = ٠،١, ٢, \ldots, n-١$

$P_i^{-1}(\{c_k\})$ هي مجموعة كل العناصر (النقاط) التي يكون فيها العنصر ذو الموقع $i$ هو $c_k$ والنقطة

$(\ldots, \underset{i-1}{c_j}, \underset{i}{c_k}, \underset{i+1}{c_p}, \ldots)$ هي نقطة في ( $\{c_k\}$ ) $P_i^{-1}$ (حيث ( $j, k, p=$ ٠،١, ٢, ..., $n-$١ ) )

الآن ليكن $a , b \in S$ و لنتأمل المجموعات

$B_١ = P_i^{-1}\{(a)\} \cap P_j^{-1}\{(b)\} \subseteq S^{\infty} \quad if\ i \neq j \ \ (i < j) \quad a \neq b$

$(\ldots, ٠, a, ١, \ldots, ١, b, ٠, \ldots), (\ldots, ١, a, ٠, \ldots, ٠, b, ١, \ldots) \in B_١$

$B_٢ = P_i^{-1}\{(a)\} \cap P_j^{-1}\{(b)\} \subseteq S^{\infty} \quad if\ i \neq j \ \ (i < j) \quad a = b$

$= P_i^{-1}\{(a)\} \cap P_j^{-1}\{(a)\} \qquad (a = b)$

$(\ldots, ٠, a, ١, \ldots, ١, a, ٠, \ldots), (\ldots, ١, a, ٠, \ldots, ٠, a, ١, \ldots) \in B_٢$

$B_٣ = P_i^{-1}\{(a)\} \cap P_j^{-1}\{(b)\} = \varnothing \quad if \quad i = j \quad a \neq b$

$i$ طالما $a \neq b$ فالنقطتان$(\ldots, ٠, a, ١, \ldots)$,$(\ldots, ٠, b, ١ \ldots)$لا يكونان في مجموعة واحدة والتي هي معكوس صورة رمز من رموز$S$ في نفس الموقع

$B_٤ = P_i^{-1}\{(a)\} \cap P_j^{-1}\{(b)\} = P_i^{-1}\{(a)\}\ if \quad i = j \quad a = b$

$(\ldots, ٠, a, ١ \ldots), (\ldots, ١, a, ٠, \ldots), (\ldots, ٠, a, ٠ \ldots) \in B_٤$

نلاحظ أن $B_٣ = \varnothing$ وأن $B_١ , B_٢ , B_٤$ مجموعات غير مفردة وأن القاعدة تتألف مــن $B_٤, B_٣,$ $B_٢, B_١$ بالإضافة إلى تقاطع $B_٤$ مع $B_٢$ و $B_١$ (لاحظ أن $B_١ \cap B_٢ = \varnothing$) (مع الافتراض دائماً أن $i \leq j$ ) نلاحظ أن $B_٣ = \varnothing$ وأن $B_١, B_٢, B_٣, B_٤$ عناصر للقاعدة لتوبولوجي الضرب علماً أن

$B_١ \cap B_٢ = \varnothing , B_١ , B_٢ \subseteq B_٤$ لأن $B_١ \cap B_٤ = B_١, B_٢ \cap B_٤ = B_٢$

وسنقدم المجموعات (عناصر القاعدة ) بصورة ابسط مما يساعدنا على تصنيفها والتعامل معها لتحديد المجاميع المغلقة والمفتوحة وعناصر القاعدة لنرمز للمجموعة $B_٤ = P_i^{-1}\{(a)\}$ بالرمز $(\overset{(i)}{a})_{i\in Z}$ وهذا الرمز يمثل مجموعة كل النقاط التي يكون فيها العنصر ذو الموقع $i$ هو $a$ و بذلك فستكون $B_١ = (\overset{(i)}{a})_{i\in Z} \cap (\overset{(j)}{b})_{j\in Z}$

( حيث $i \neq j\ ,\ a \neq b$ ) و لنرمز لها بالرمز $(\overset{(i)}{a}, \overset{(j)}{b})_{i,\, j\in Z}$ و كذلك تكون $\cap\ (\overset{(j)}{a})_{j\in Z}$

$B_٢ = (\overset{(i)}{a})_{i\in Z}$

و يرمز لها بالرمز $\overset{(i)}{a}\,,\,\overset{(j)}{a}\,)_{i,\,j\in Z}$ ( حيث $i \neq j$ , $a= b$ ) على سبيل المثال لو فرضنا أن $S$ $= \{٠،١\}$ , $a = ٠$ , $b = ١$ سيكون

$$(\overset{(i)}{0},\ \overset{(j)}{1}) = (\dots,\overset{(i)}{0},\dots,\overset{(j)}{1},\dots) \qquad (\overset{(i)}{1},\ \overset{(j)}{0}) = (\dots,\overset{(i)}{1},\dots,\overset{(j)}{0},\dots)$$

$$(\overset{(i)}{0},\ \overset{(j)}{0}) = (\dots,\overset{(i)}{0},\dots,\overset{(j)}{0},\dots) \qquad (\overset{(i)}{1},\ \overset{(j)}{1}) = (\dots,\overset{(i)}{1},\dots,\overset{(j)}{1},\dots)$$

نلاحظ أن $\phi = (\overset{(i)}{1},\overset{(j)}{0}) \cap (\overset{(i)}{0},\overset{(j)}{1})$ ولكن كل منهما مجموعة غير منتهية جزئية من $B_١$ وكذلك المجموعتان $(\overset{(i)}{1},\overset{(j)}{1}),(\overset{(i)}{0},\overset{(j)}{0})$ منفصلتان غير منتهيتين ولكن كل منهما مجموعة جزئية من $B_٢$ .

لقد استخدمنا المثال أعلاه للتوضيح ويمكن قياس الحالات العامة على ضوء الحالة أعلاه لكن الخصائص التوبولوجية لا تتأثر بزيادة عدد عناصر $S$ لذلك تقوم بعض الأبحاث باعتبار $S$ هي مجموعة الرموز {١ ,٠} دون الإخلال بأي تعميم كما أسلفنا. ولا يمكن لأي مجموعة مفردة جزئية من $B_١$ أو $B_٢$ أن تقع في القاعدة لتوبولوجي الضرب ( كما لاحظنا في الفضاء $T^{\infty}$ ) لأن كل عناصر القاعدة هي المجموعات $B_١, B_٢, B_٣, B_٤$ أو مجموعات جزئية منها وكل عنصر في القاعدة يأخذ الشكل

$$(\overset{(\rho_1)}{a_1}, \overset{(\rho_2)}{a_2}, \dots, \overset{(\rho_n)}{a_n}) \qquad n \in I_١ = \{١, ٢, ٣, \dots\}$$

حيث $p_i : i = ١, ٢, \dots, n$ أعداد صحيحة غير متساوية وليس بالضرورة أن تكون متخالفة إلا أن $p_١ < p_٢ \dots < p_n$

**إذا كان $n > ١$ أما $a_j$ رمز في $S$ يختلف باختلاف $j$ وبإمكاننا القول بأن**

$$(\overset{(\rho_1)}{a_1}, \overset{(\rho_2)}{a_2}, \dots, \overset{(\rho_n)}{a_k}) = (\overset{(\rho_1)}{a_1}) \cap (\overset{(\rho_2)}{a_2}) \cap \dots \cap (\overset{(\rho_n)}{a_k})$$

لذا فهي مجموعة جزئية من $B_١$ وقد تكون جزئية من $B_٢$ ولايمكن لمجموعة مفردة أن تكـــون جزئية من $B_١$ أو $B_٢$ على سبيل المثال نفرض أن $S = \{٠, ١, ٢\}$ وأن

$$P_١ = (\dots,١،٢،٠,\dot{0}٠،١،٢،٠،١,\dots) \qquad P_٢ = (\dots,٢،٢،١,\dot{0},٠،١،٠،٢, \dots)$$

نلاحظ أن $(\overset{(0)}{0}\,,\overset{(3)}{0}) \cap (\overset{(-2)}{2}\,,\overset{(0)}{0}) = (\overset{(-2)}{2}\,,\overset{(0)}{0}\,,\overset{(3)}{0}) \ni P_1,P_2$ لأن $B_1 \supset (\overset{(-2)}{2}\,,\overset{(0)}{0})$

$(\overset{(0)}{0}\,,\overset{(3)}{0}) \subset B_2$, فأن $P_1,P_2 \in B_1, B_2$ وكذلك النقاط الآتية

$P_3$=(…,٠،٢،٠،٠,$\dot{0}$,١،١،٠،٠،٢,…) , $P_4$=(…,١،٢،٢,$\dot{0}$,٠،٢،٠،٠،٠,…) , $P_5$=(…,٢،٢،١,$\dot{0}$,٢،٠،٠،٠،١, …)

**ويمكن كتابة عدد غير منته من النقاط التي تنتمي للمجموعة** $(\overset{(-2)}{2}\,,\overset{(0)}{0}\,,\overset{(3)}{0})$

في المثال أعلاه $n = ٣$ ولكن مهما زاد عدد $n$ فيوجد أكثر من نقطة تنتمي إلى $(\overset{(\rho_1)}{a_1}\,,\overset{(\rho_2)}{a_2}\,,\dots,\overset{(\rho_n)}{a_k})$ وذلك لأنه مهما زاد عدد $n$ فبالإمكان كتابة نقطتين تختلفان في الموقع $\rho_n + ١$ أو في الموقع $\rho_n - ١$ فنلاحظ

$$P_2,P_3 \in (\overset{(-2)}{2}\,,\overset{(0)}{0}\,,\overset{(2)}{1}\,,\overset{(3)}{0}\,,\overset{(4)}{2})_{n=5} \qquad P_1,P_4 \in (\overset{(-3)}{1}\,,\overset{(-2)}{2}\,,\overset{(0)}{0}\,,\overset{(2)}{2}\,,\overset{(3)}{0})_{n=5}$$

$$P_2,P_4 \in (\overset{(-2)}{2}\,,\overset{(0)}{0}\,,\overset{(1)}{0}\,,\overset{(3)}{0})_{n=4} \qquad P_2,P_5 \in (\overset{(-3)}{2}\,,\overset{(-2)}{2}\,,\overset{(-1)}{1}\,,\overset{(0)}{0}\,,\overset{(3)}{0})_{n=5}$$

المجموعة التي تأخذ الشكل $(\overset{(\rho_1)}{a_1}\,,\overset{(\rho_2)}{a_2}\,,\dots,\overset{(\rho_n)}{a_k})$ هي عنصر من عناصر القاعدة لتوبولوجي الضرب لـ $S^\infty$ حيث $n, k \in I$، أما المجموعة المفتوحة فهي اتحاد لمجاميع مفتوحة فهي أما تكون $S^\infty$ أو $(\varnothing = \varnothing \cup \varnothing)$ أو بالشكل $(\overset{(\rho_1)}{a_1}\,,\overset{(\rho_2)}{a_2}\,,\dots,\overset{(\rho_m)}{a_k})$ حيث $١ \le \boldsymbol{m} \le \boldsymbol{n}$ ولما كأن من غير الممكن كتابة مجموعة مفردة في القاعدة فقطعاً سيكون كتابة مجموعة مفردة مفتوحة أيضا امراً غير ممكن لأن الاتحاد يعطي مجموعة اكبر. لذا لن تكون هناك مجموعة مفردة مفتوحة لذا الفضاء لا يكون مفرقاً لكنه قد يحتوي على مجموعة مفتوحة و مغلقة في الوقت ذاته وكل مجموعة مغلقة فيه قد تكون مفتوحة وقد لا تكون .

### *فضاء المتتابعات الثنائية* $X(S)$

الآن سنعرف فضاء آخر وهو فضاء المتتابعات الثنائية $X(S)$ على مجموعة الرموز $S$ ولكننا نحتاج إلى

تعاريف ومفاهيم أولية وربما قد اشرنا لبعضها سابقاً .

تعاريف(١): ١) يقال للمجموعة $S$ المنتهية العناصر بأنها مجموعة رموز [H] أو أبجدية [B] وكل عنصر فيها يسمى رمزاً أو حرفاً على الترتيب

٢) رصف عدد منته من رموز(حروف)الأبجدية $S$ يسمى بالكلمة أو القطعة وعدد عناصرها هو طولها

٣) المتتابعة الثنائية هي دالة $x : Z \longrightarrow S$ تكتب على شكل حروف متراصفة الواحد بجأنب الاخر و توضع نقطة يسار الحرف الذي يمثل صورة الصفر [LM].إذا تأملنا $x$ كمتتابعة ثنائية (أو متتابعة لأنهائية مزدوجة) تكون $\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_i = \ldots\ x_{-٢}\ x_{-١}\ .x_{٠}\ x_{١}\ x_{٢} \ldots$ حيث $x_{i,i\in Z}$ عنصر في $S$ [B].

٤) القطعة المركزية في المتتابعة الثنائية $\mathbf{x}$ هي قطعة طولها $٢k+١$ وعنصرها الأوسط ذو الموقع $k$ هو صورة الصفر تحت تأثير المتتابعة $\mathbf{x}$.

٥) دالة النقلة $\sigma$ هي هوميومورفيزم ذاتي على المتتابعات الثنائية تعرف بأنه ا تنقل كل رمز موقع واحد لليسار أي أن $[\sigma(x)]_i = x_{i+١}$ [B] و [B] ●.

أمثلة(٢):١) المتتابعات الآتي ة متتابعات على مجموعة الرموز {٦ ... ,٢ ,١ ,٠} .

... ٢ ٣ . ٥ ١ ٦ ...

... ٠ ٣ . ١ ٢ ٤ ...

٢) المتتابعة الآتية هي متتابعة على الأبجدية {*, #,◊}

... # * # ◊ ◊ ◊ . # # * * * # ◊ ... ▬.

ترميز(٣) : مجموعة جميع المتتابعات الثنائية على الأبجدية $S$ يرمز لها بالرمز $X(S)$ ◙.

**X(S) و الأسطوانات والحزم**

سنعرف الآن مجموعة من المتتابعات وهي نوع جديد من المجموعات لها ميزة معينة قد تنفعنا في دراستنا

تعريف(٤) : العدد غير المنتهي من المتتابعات التي لها نفس الرموز في $n$ من المواقع تسمى بحزمة نونية الربط أو حزمة-$n$ فإذا كانت الرموز في المواقع $p_١, p_٢, \ldots , p_n$ هي نفسها في كل المتتابعات تعرف تلك المجموعة من المتتابعات بحزمة نونية الربط والأرقام $p_١, p_٢, \ldots ,$ $p_n$ ليست بالضرورة أن تكون متعاقبة لكن يجب أن يكون فيها $p_١< p_٢< \ldots < p_n$ و إذا كانت متعاقبة أي يكون فيها $p_i + ١ = p_{i+١}$ (لكل $i = ١،٢, \ldots ,n$

)تعرف تلك الحزمة النونية بأنها اسطوانة و سبق أن عرفت في بعض المصادر [B] ولكن بشكل آخر أما الحزمة النونية فهي محاولة منا لتعميم مفهوم ألاسطوانة هذا ولنرمز للحزمة بالرمز ( $B_n=(a_1^{p_1}, a_2^{p_2}, ..., a_n^{p_n})$ و لنرمز للاسطوانة بـــ $a_1^{k+1}a_2^{k+2}...a_n^{k+n}$ و إذا ظهرت القطعة $Q = p_١ \, p_٢ \, ... \, p_n$ في كل متتابعة $x$ بحيث لعدد صحيح $i \in \mathbf{Z}$ تكون $x_i = p_١, x_{i+١} = p_٢, ..., x_{i+n-١} = p_n$ يرمز للاسطوانة بالرمز $Q_i$ والرمز $C_k(n)$ هو رمز لاسطوانة تبدأ بالموقع $k$ وتنتهي بالموقع $k+n$-١ ●.

مثال (٥) : المتتابعات الآتية

... ٢ ٤ ٥ ١ . ٠ ٠ ١ ٢ ١ ١ ٢ ...

... ٣ ٤ ٣ ٣ . ٠ ١ ٢ ٢ ٠ ١ ٠ ...

... ١ ٤ ٣ ٤ . ٠ ٢ ٠ ٢ ٢ ١ ٣ ...

**هي عناصر في الحزمة ( $١^٥ , ٢^٣ , ٠^٠ , ٤^{-٣}$ ) على مجموعة الرموز {٤ ,٣ ,٢ ,١ ,٠ } والمتتابعات**

... ٢ ١ ٠ ٤ ٣ . ٥ ٣ ١ ١ ٠ ٣ ٦ ...

... ٣ ١ ٠ ٤ ٣ . ٥ ٣ ١ ١ ٠ ٣ ٥ ...

عناصر في ألاسطوانة العشارية $C_{(-٤)}(١٠) = Q_{-٤} = ١^{-٤}\, ٠^{-٣}\, ٤^{-٢}\, ٣^{-١}\, ٥^{٠}\, ٣^{١}\, ١^{٢}\, ١^{٣}\, ٠^{٤}\, ٣^{٥}$

▬.

**تعريف(٦):لتكن*S* أبجدية ما و*X*(*S*) مجموعة كل المتتابعات الثنائية على*S* وكانت ($a^{(i)}$) مجموعة كل المتتابعات التي يكون فيها الحرف*a* صورة للعنصر$i \in Z$ أي أن $(a^{(i)})=\{x \in X(S): x_i = a, a \in S, i \in Z\}$ومن الملاحظ أنها حزمة أحادية وأن**

**$(a^{(i)})_k$, $k$=١, ..., $n$ رمز لعائلة مؤلفة من عدد منتهي$k$ من الحزم الأحادية ولتكن $A_1^{(i)}$ مجموعة كل الحزم الأحادية الممكن كتابتها على*S* ولنرمز لمجموعة كل الحزم النونية على*S* بـ $A_n^{(i)}$ أي أن**

$A_1^{(i)} = \{(a^{(i)}) \forall i \in Z \;\&\; \forall a \in S\}$ ●.

$$A_n^{(i)} = \{\bigcap_{k=1}^{n}(a^{(i)})_k \forall n \in Z^+ \;\&\; \forall i \in Z \;\&\; \forall a \in S\}$$

تعريف (٧): لتكن $X(S)$ أبجدية على$S$ لنعرف توبولوجي $T_{X(S)}$ على $X(S)$ بأنـــه مجموعـــة $O$: التي لها الخاصية $X(S)$ تضم $\varnothing$ و $X(S)$ و مجموعة كل المتتابعات مجموعات جزئية من

كل متتابعة $x\in O$ يوجد حزمة نونية $B_n=(a_1^i,...,a_k^j)$ تحوي $x$ وتكون جزئية من $O$ أي أن

$x\in B_n\subset O$ ●.

ملاحظة(٨): من الواضح ( في التوبولوجيا العامة ) أن $A_n^{(i)}$ قاعــدة للفــضاء $X(S)$ و أن $A_1^{(i)}$ قاعدة جزئية للفضاء $X(S)$ و ذلك لأنه لأي مجموعة مفتوحة $O$ ولأي متتابعة ثنائية $x\in O$ يوجد حزمة نونية $B_{n,x}\in A_n^{(i)}$ (وهذه الحزمــة تقــاطع منتهــي لمجموعــات مــن $A_1^{(i)}$ ) بحيــث $x\in B_{n,x}\subset O$ لكن ممكن كتابة $O$ بالشكل $O=\bigcup_{x\in O} B_{n,x}$ فتكون

$A_n^{(i)}$ قاعدة و $A_1^{(i)}$ قاعدة جزئية لــ $X(S)$ ®.

من الواضح ( في التوبولوجيا العامة ) أن الحزمة النونية و الأحادية مجموعتان مفتوحتان طالما كانا عناصر في القاعدة والقاعدة الجزئية و سنبين الآن أنهما مغلقتان

**ممهدة(٩):كل حزمة أحادية $(a^{(i)})$ على الأبجدية $S$ مجموعة مغلقة**

البرهان : لتكن $S=\{b_0,b_1,\ldots,b_{r-1}\}$ حيث $r$ عدد طبيعي غير صفري و ليكن $k$ عدد طبيعي آخر بحيث $0\le k\le r$

لنفرض أن $a=b_k$ أي أن $(a^{(i)})=(b_k^{(i)})$ ويمثل عدد المتتابعات الثنائية التي يكون فيها صورة $i$ هي $a$ أو $b_k$

**نلاحظ أن $(b_j^{(i)})$ (لأي $j\neq k$ ) مجموعة منفصلة عن $(a^{(i)})$ لأننا بإبدال $a=b_k$ في الموقع $i$ بـ $b_j^{(i)}$ هذا يعني أن**

فــــــــــأن $j\neq k$ وذلــــــــــــــــك لأي $(b_j^{(i)})\cap(a^{(i)})=\phi\Rightarrow(b_j^{(i)})\subset(a^{(i)})^c$

$$\bigcup_{\substack{j\neq k\\ j\in\{0,1,\ldots,r-1\}}}(b_j^{(i)})=(a^{(i)})^c$$

∴ متمم$(a^{(i)})$ كتب على هيئة إتحاد منتهي لمجموعات مفتوحة فيكون مفتوحا وهو مغلق أصلا كونه متمم لمفتوح

فتكون $(a^{(i)})$ مغلقة وهي بالأصل مفتوحة ©.

من التوبولوجيا العامة و من تعريف ٦) يتضح ما يأتي:-

**نتيجة(١٠) : كل حزمة نونية مجموعة مغلقة ©.**

**الفضاء $X(S)$ و الفضاء $S^{\infty}$**

الحزمة النونية هي تقاطع عدد منتهي من الحزم الأحادية والمجموعة المفردة ليست أحد عناصر القاعدة لذا فهذا الفضاء ليس مفرقا إلا أن عناصر القاعدة والقاعدة الجزئية تكون مغلقة و(هي بالأصل) مفتوحة في الوقت ذاته. و هذه السمة تشبه السمة التي أشرنا إليها للفضاء $S^{\infty}$ و سنبين الآن أن الفضائين متكافئين توبولوجيا (هوميومورفيك).

مبرهنة(١١):الفضاء $X(S)$ مكافئ توبولوجيا (هوميومورفيك) للفضاء $S^{\infty}$

البرهان:المطلوب إيجاد هوميومورفيزم أي دالة تقابلية (متباينة وشاملة) ومستمرة ومفتوحة من

$$S^{\infty} = \ldots \times S \times S \times S \times \ldots$$

للفضاء $X(S)$

لنتأمل الدالة
$$f(\ldots, \overset{-2}{x_{-2}}, \overset{-1}{x_{-1}}, \overset{0}{x_0}, \overset{1}{x_1}, \overset{2}{x_2} \ldots) = \ldots x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2\ldots$$

أي أن صورة أي نقطة في $S^{\infty}$ تكون متتابعة ثنائية عناصرها نفس عناصر النقطة وفي نفس المواقع أي بإلغاء الأقواس والفارزات بينها لتصبح متتابعة ثنائية .هذا يعني أن كل نقطة هي متتابعة صورة النقطة لا يمكن أن تعطينا متتابعتين بل متتابعة واحدة . وكل نقطة صورتها متتابعة أي لا يوجد نقطة ليس لها صورة فالدالة معرفة تعريفا جيدا . المتتابعة هي صورة لنقطة واحدة ولا يمكن أن تكون صورة لأكثر لذا فهي متباينة وكل متتابعة صورة لنقطة واحدة إذن الدالة شاملة فهي إذن تقابل .

الآن لنأخذ عنصر في القاعدة الجزئية لهذا التوبولوجي(أي حزمة أحادية) ولتكن $(a^{(i)})$أي أنها مجموعة كل المتتابعات الثنائية فيها صورة العنصر $i$ هي $a$ حيث $a$ رمز في $S$ .

لتكن $x$ متتابعة في$(a^{(i)})$ أي أن $x = \ldots x_{i-1}\ a\ x_{i+1}\ldots \Leftarrow f^{-1}(x) = (\ldots, \overset{i-1}{x_{i-1}}, \overset{i}{a}, \overset{i+1}{x_{i+1}}, \ldots)$

نلاحظ أن $a$ موجودة في الموقع $i$ وذلك لكل $x \in (a^{(i)})$ يكون $a$ في الموقع $i$ في $f^{-1}(x)$ فتكون $a$ ثابتة في الموقع $i$ بينما باقي المواقع قد لا تكون نفسها هذا يعني أن $B_4 = {}_{i \in Z}$ $f^{-1}((a^{(i)}))=(a^{(i)})$ وهي عنصر في القاعدة الجزئية للفضاء $S^{\infty}$ وبالتالي فهي مفتوحة وهذا لكل حزمة أحادية.وبما أن(من التوبولوجي العام) معكوس صورة كل عنصر في القاعدة الجزئية يكون مفتوحا إذا و إذا فقط كانت الدالة مستمرة [**D**] فالدالة $f$ مستمرة .

الآن لكي تكون $f$ هوميومورفيزم علينا إثبات أن $f$ مفتوحة أي إثبات أن صورة كل عنصر في قاعدة $S^{\infty}$ مفتوحة في $X(S)$ [**D**].

لتكن $A$ عنصرا من عناصر القاعدة والذي هو تقاطع $n$ من عناصر القاعدة الجزئية $P_i^{-1}\{a\}$ و $A$ ممكن أن تأخذ الشكل $\overset{(q_1)}{a_1},\ldots,\overset{(q_n)}{a_k}) = P_{q_1}^{-1}\{a_1\}\cap\ldots\cap P_{q_n}^{-1}\{a_k\}$ ) أي مجموعة كل النقاط لها الرموز الثابتة $a_1,\ldots, a_k$

(رموز في $S$) في المواقع ( $q_1,\ldots\ldots, q_n$ )( $q_i < q_{i+1}, q_i\in \mathbf{Z}, i=1,2,3,\ldots,n$)

لتكن $y \in A$ حيث $y = (\ldots, \overset{q_1-1}{x_{q_1-1}}, \overset{q_1}{a_1}, \overset{q_1+1}{x_{q_1+1}},\ldots \overset{q_n-1}{x_{q_n-1}}, \overset{q_n}{a_k}, \overset{q_n+1}{x_{q_n+1}},\ldots)$ فأن

$$x = f(y) = \ldots x_{q_1-1}a_1x_{q_1+1}\ldots x_{q_n-1}a_kx_{q_n+1}\ldots$$

ستكون صورة الأعداد $g_1, g_2\ldots g_n$ تكون ثابتة في كل متتابعات $f(A)$ هذا يعني أن صورة $A$ هي حزمة نونية الربط وتكون بالطبع مفتوحة في $X(S)$ . فـ $f$ مفتوحة . إذن الفضاء $S^{\infty}$ يكافئ توبولوجيا الفضاء $X(S)$ ©.

**المجموعات المغلقة والمفتوحة في $X(S)$**

الآن سندرس الفضاء $X(S)$ وصفاته التوبولوجية سنعرض بعض مجموعاته الجزئية ومن ثم ندرس صفاتها بادئين من تحديد المجموعات المفتوحة والمغلقة فيها .

تعريف(١٢):لتكن $X(S)$ فضاء المتتابعات الثنائية على الأبجدية $S$ و كانت $K$ مجموعة منتهية من القطع النونية وكانت $F\subset X(S)$ مجموعة المتتابعات التي تحتوي على قطع في$K$فأن$Y=F^c$ متتابعات لا تحتوي على قطع من $K$.( وتسمى عناصر$K$بالقطع الممنوعة[B] يسمى الفضاء الجزئي المعرف على$Y$ بالنقلة من النوع المنتهيShift of Finite Type و يرمز لها بالرمزSFT [B].أو فضاء ماركوف التوبولوجي (Topological Markov Space .●

ترميز(١٣):إذا كانت SFT نقلة معرفة على المجموعة $Y$ يرمز لها بالرمز $X_Y$ ◙.

أمثلة(١٤):١) إذا كانت الأبجدية$S=\{0,1\}$و$Y$مجموعة كل المتتابعات التي لا تظهر فيها الكلمة الثنائية ١١ أي $K=\{11\}$.$X_Y$ هنا يسمى بنقلة الاعتدال[ LM ].

٢) لتكن $Y$ مجموعة المتتابعات الثنائية التي يظهر بها عدد زوجي من الأصفار ( أو لا يظهر ) بين عنصرين يمثلان الرمز ١ أي أن $K=\{10^{2n-1}1 : n\geq 1\}$

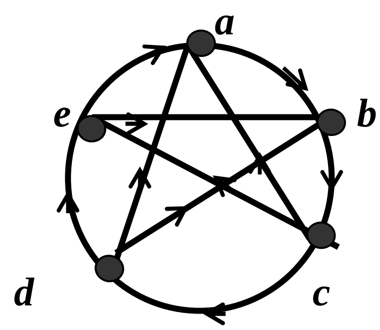
**فالمتتابعات** ... ١٠٠٠٠٠٠٠٠ ١ ...

... ١ ٠٠٠٠٠ ١ ...

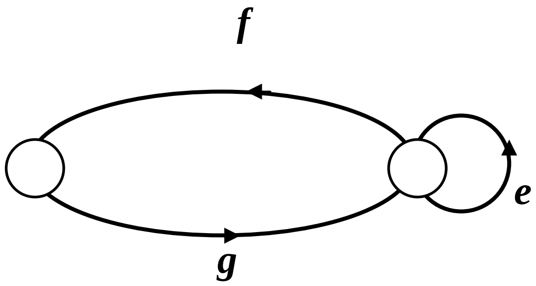
لا تظهر في $Y$ بينما تظهر المتتابعة الآتية في $Y$ فتسمى $X_Y$ بالنقلة الزوجية [LM].

... ١١١٠٠ ١ ...

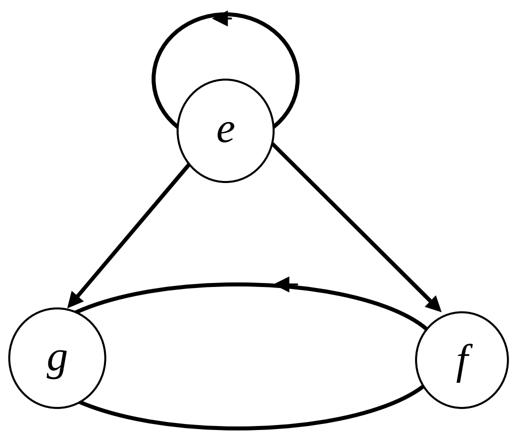
٣) لتكن $S=\{a,b,c,d,e\}$ وكانت $Y$ مجموعة متتابعات بحيث إذا ظهر في أي متتابعة حرف $f\in S$ يوجد كلمة $W$ مؤلفة من $n$ الأحرف ($n>1$) مختلفة عن بعضها وعن $f$ بحيث أن الكلمة $fwf$ تظهر في تلك المتتابعة من $Y$ هذا يعني أن $ff$ كلمة ممنوعة في $Y$ وإذا كانت $fg$ كلمة مسموح بها (ممنوعة) في $Y$ فأن $gf$ كلمة مرفوضة (مقبولة) في $Y$ وبسبب وجود مجموعة من القطع المرفوضة. فلو فرضنا أن $k=\{aa,bb,cc,dd,ee,ac,ad,ba,bj,be,cb,dc,de,ea,ec\}$ هي القطع المرفوضة يمكن أن تمثل القطع المقبولة بالمخطط الآتي :




٤) لوكانت $S=\{e,f,g\}$ وكانت $J=\{ee,ef,fg,ge,gf\}$ هي مجموعة القطع المسموح بها في متتابعات هذا مثال لنقله من النوع المنتهي يمكن لقطعها المسموح بها أن تمثل بالمخطط الآتي :-

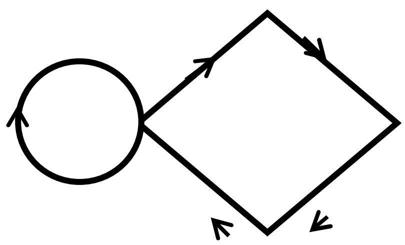



أو المخطط [LM]



٥) لتكن $Y \subset X(S)$ حيث $S=\{a,b,c\}$ ودائما تكون القطعة من النوع $ab^kc^ka$ ($k$ عدد طبيعي) جزءا من النقطة $x\in Y$ وأن القطعة $ab^mc^ka$ قطعة ممنوعة إذا كان $m \neq k$ يسمى الفضاء $X_Y$ بنقلة حرة السياق [LM].

٦) لتكن $S=\{٣،٢،١،٠\}$ و $Y \subset X(S)$ مجموعة المتتابعات التي لا تظهر فيها ٢ إلا بعد ١ ولا يظهر ١ إلا بعد ٠ أي أن القطعة ٠١٢ هي قطعة مقبولة وكذلك القطعة $٢٣^n٠$ ويمكن تمثيل القطع المقبولة بالمخطط الآتي :




٧) لتكن $S=\{٠،١, ... ,٥\}$ و$Y$ مجموعة المتتابعات التي لا تظهر فيها الكلمة $W$=١٢٣٤٥ [$B$]

٨) إذا كانت $S=\{٠،١\}$ فالمتتابعة الصفرية (جميع عناصرها أصفارا) تكون نقلة من النوع المنتهي SFT مع الفضاء الجزئي وكذلك المتتابعة الواحدية (جميع عناصرها واحد) تكون $SFT$ مع الفضاء الجزئي▬.

الآن سنتناول مجموعات جزئية أخرى من هذا الفضاء $X(S)$ وسنناقش متى تكون مغلقة ومفتوحة وسنناقش أيضا البنية الهندسية لمجموعة النقطة Point Set Topology في هذا الفضاء .

قضية(١٥): المجموعة المفردة مجموعة مغلقة في $X(S)$ .

البرهان: لتكن $x = ...\ x_{-١}\ x.\ x_١ ...$ نقطة في $X(S)$



N0.3 ............ JOURNAL OF COLLEGE OF

نلاحظ أن $x = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} x_i^{(i)}$ أي ممكن أن تكتب كتقاطع لمجموعة غير منتهية من الحـــزم الأحادية والتي هي مغلقة ومفتوحة في الوقت ذاته فأن أي تقاطع لهذه الحزم يكـــون مجموعـــة مغلقة ©.

بينا سابقا أن المجموعة المفردة غير مفتوحة والمجموعة المنتهية اتحاد منتهي لمجموعات مفردة فهذا يقودنا للآتي:-

نتيجة(١٦): كل مجموعة متممة لمجموعة منتهية تكون مفتوحة غير مغلقة في $X(S)$ ©.

مبرهنة(١٧): كل مجموعة يعرف عليها $SFT$ هي مغلقة .

البرهان: في التوبولوجيا العامة المجموعة$A$ مغلقة إذا و إذا فقط كانت $A' \subset A$ و ممكن إثبات $\acute{A}\subset A$ بأخذ نقطة لا تنتمي لــ$A$ ونبرهنها أنها لا تنتمي لــ $\acute{A}$ أي هي ليست نقطة غايـــة لــــ $A$($A'$مجموعة نقاط الغاية للمجموعة $A$) .

لتكن $x$ متتابعة ليست في $Y$ هذا يعني أن $x\in Y^{c}$ فأنه يوجد قطعة ممنوعـــة $B=b_1\ldots b_k\ldots b_n$ تظهر في $x$ بحيث $x_{i+j-1}=b_k$ ( حيث $i,j\in \mathbf{Z}$ , $k\in \mathbf{Z}^{+}$) هذا يعنـــي أن $x_i\ldots x_{i+j-1}\ldots x_{i+n-1}$ $B=$ فيوجد اسطوانة $C=b_1^{i}\ldots b_k^{i+j-1}\ldots b_n^{i+n-1}$ تحوي $x$ وتحوي متتابعات تظهر فيها $B$ ومن الواضح أن $C\cap Y=\varnothing$ لأن $B$ لا تظهر في $Y$ هذا يعني أن $(C/\{x\})\cap y=\varnothing$ . فحـــسب تعريـــف نقطـــة الغايـــة $x\notin Y' \Leftarrow Y' \subset Y$ فـــ $Y$ مغلقة ©.

تعريف(١٨): المتتابعة $y\in X(S)$ دورية إذا وجد$n\in I_1=\{1,2,3,\ldots\}$ بحيث$y_{\acute{i}}=y_{\acute{i}}+n$ لكــل$\acute{i}\in \mathbf{Z}$ فتعرف$n$ بأنهـــا دورة $y$ أي أنـــه هنـــاك قطعـــة $W$ تظهـــر فـــي $y$ بـــشكل متكـــرر أي أن $y=\ldots WWW\ldots$ حيث $W=x_i\ldots x_{i+n-1}$ .●

مبرهنة(١٩): إذا كانت $y\in X(S)$ متتابعة دوريه فأن المجموعة $A=\{\sigma^{k}(y)\}_{k\in \mathbf{z}}$ مغلقة

البرهان: كل متتابعة في $A$ هي متتابعة بالشكل $\ldots WWW\ldots$ ولكن صورة الصفر تختلف من عنصر لآخر

الآن لتكن$x\notin A$ فيوجد قطعة $V=x_i\ldots x_{i+n-1}$ تختلف عن $W$ تظهر في كل متتابعـــات ألاسطوانة$x_i^{i}\ldots x_{i+n-1}^{i+n-1}$ التي لا تحتوي على متتابعات من $A$ لأن $V$ لا تظهر في متتابعات في $A$ فتكون ألاسطوانة المذكورة جزء من $A^{c}$ . إذن $x$ نقطة داخلية في $A^{c}$ وهكذا الحال لكل نقطة في $A^{c} \Leftarrow A^{c}$ مفتوحة و $A$ مغلقة

أو بطريقة أخرى إذا كانت $y\in A$ فأن

$$y=\ldots y_{-1}.\, y_0\, y_1\, y_2 \ldots y_{n-1} \ldots = \ldots y_{n-1}.\, y_0\, y_1\, y_2 \ldots y_{n-1}\, y_0\, y_1 \ldots$$

$$\sigma(y)=\ldots y_0.\, y_1\, y_2 \ldots y_{n-1}\, y_0\, y_1 \ldots \quad \sigma^2(y)=\ldots y_0\, y_1.\, y_2 \ldots y_{n-1}\, y_0\, y_1\, y_2 \ldots$$

وأن $\sigma^n(y)=\ldots y_{n-2}\, y_{n-1}.\, y_0\, y_1\, y_2 \ldots y_{n-1}\, y_0\, y_1 \ldots = y$

هذا يعني أن المتتابعات ستتكرر لذا ستكون $A=\{y,\sigma(y),\ldots,\sigma^{n-1}(y)\}$ أي أن $A$ مجموعة منتهية ومن نتيجة (١٦)

المجموعة المنتهية مجموعة مغلقة ©.

ترميز(٢٠): مجموعة كل النقاط الدورية يرمز لها بالرمز $P(S)$

مبرهنة(٢١): $P(S)$ مجموعة كثيفة أي أن $\overline{P(S)} = X(S)$

البرهان: من التوبولوجيا العامة نعرف أن $P(S) \subset \overline{P(S)}$ هذا يعني أن كل نقطة في $P(S)$ هي ملاصقة لــ $P(S)$ أي تنتمي لــ $\overline{P(S)}$ فيجب إثبات أن كل نقطة لا تنتمي لـــ $P(S)$ تكــون في $\overline{P(S)}$ .

لتكن $x \notin P(S)$ ولتكن $V=x_i \ldots x_j$ قطعة تظهر فــي $x$ فالمجموعــة الاســطوانية $C$ $=x_i^i \ldots x_j^j$ تحوي $x$

وتحوي النقطة

$$v =\ldots VVx_i \ldots x_j\, VVV \ldots$$

ويمكن أن تكتب بالشكل

$$v = \ldots VVVVV \ldots$$

وهي في $P(S)$. هذا يعني أن $C$ تحوي على نقاط من $P(S)$ فــ $C\cap P(S)\neq\varnothing \Leftarrow x\in \overline{P(S)}$

$\therefore$ $\overline{P(S)} = P(S) \cup P(S)^c = X(S)$ ©.

مبرهنة(٢٢): $[P(S)]' = X(S)$

البرهان: لتكن $x\in X(S)$ متتابعة غير دورية فتظهر فيها قطعة $V=x_i \ldots x_j$ وتحويها ألاسطوانة $C=x_i^i \ldots x_j^j$ وأيضا تحوي النقطة

$$v =\ldots VVx_i \ldots x_j\, VVV \ldots$$

الموجودة في $P(S)$ .

$\therefore$ $(C/\{x\})\cap P(S)\neq \emptyset \Leftarrow x\in [P(S)\not\in]'$ ($x$ نقطة غاية لـــ $P(S)$)

الآن لتكن $x\in P(S)$ . لو كانت $V=x_i \dots x_k \dots x_j$ فيمكن أن تكتب $x$ بالصورة

$$v = \dots VV\,x_i \dots x_k \dots x_j VVV \dots$$

فالمجموعة الاسطوانية $C=x^{i}_{i} \dots x^{k}_{k}$ تحوي $x$ وتحوي المتتابعة

$$w=\dots WWWx^{i}_{i} \dots x^{k}_{k}\,WW\dots$$

علما أن $W=x_i \dots x_k$ هذا يعني أن $(C/\{x\})\cap P(S)\neq\emptyset$

$\therefore$ $x\in [P(S)]' \Leftarrow [P(S)]'=X(S)$ ©.

نتيجة(٢٣): $P(S)$ ومتممتها لا يعرف عليهما SFT

البرهان: من مبرهنة(٢٢) $[P(S)]\not\subset P(S)\Leftarrow P(S)$ ليست مغلقة فأن $P(S)$ لا يعرف عليها SFT من مبرهنة (١٧) .

الآن لتكن $x\in P(S)$ وكانت $W=x_i \dots x_j$ قطعة تظهر في $x$ بحيث

$$x = \dots WWW\,x_i \dots x_j\,WW$$

ألاسطوانة $C=x^{i}_{i} \dots x^{j}_{j}$ ممكن أن تحوي نقاط من $(P(S))^c$ فأن $(C/\{x\})\cap(P(S))^c \neq \emptyset$ أي أن $x\in ([P(S)]^c)'$ هذا يعني أن $([P(S)]^c)'\not\subset[p(S)]^c$ إذن $[P(S)]^c$ غير مغلقة فلا يعرف عليها $SFT$©.

أمثلة(٢٤): ١) لتكن $S=\{٠, ١\}$ ولتكن $x\in X(S)$ متتابعة تعرف بما يأتي

$$x = \dots ٠\ ٠\ ٠\ .\ ١\ ٠\ ٠\ ٠\ ٠ \dots$$

وأن $A=\{\sigma^{k}(x)\}_{k\in \mathbf{Z}}$ مجموعة جزئية من $X(S)$ أي أن $A$ مجموعة كل المتتابعات التي يظهر فيها الرمز ١ مرة

واحدة فقط لنتأمل $A^c$ . نلاحظ أن أي متتابعة في $A^c$ ويظهر فيها الرمز ١ أكثر من مرة هي عنصر في الحزمة $B=(١^{(i)},\dots,١^{(j)})$ (حيث $i, j\in \mathbf{Z}$ و $i<j$) أو ألاسطوانة $C=١^{i}\,١^{i+١}$ وبما أن كل متتابعة في $A$ لا يظهر فيها الرمز ١ أكثر من مرة إذن $B\cap A=\emptyset$ وكذلك $C\cap A=\emptyset \Leftarrow$ $B\subset A^c$، $C\subset A^c$ هذا يعني أن أي متتابعة يظهر فيها الرمز ١ أكثر من مرة هي نقطة داخلية

في$A^c$ المتتابعة الصفرية هي نقطة غاية لـــ $A$ كون أن اسطوانة أو حزمة التي تحويها يجـــب أن تحوي نقطة في $A$ .

مثلا الحزمة $(٠^{(٣)},٠^{(١)},٠^{(-١)})$ تحوي $x$ ، $\sigma^{-١}(x)$ ، $\sigma^{٢}(x)$ و تحوي أيضا المتتابعـــة الصفرية التي هي النقطة الوحيدة الموجودة في$A^c$ ولا يظهر فيها الرمز ١ أكثر من مـــرة وهـــي نقطة غير داخلية في $A^c$ لذا فأن $A$ ليست مغلقة $(\acute{A}\not\subset A)$ وهي ليست مفتوحة كون $A^c$ ليـــست مفتوحة بسبب أن المتتابعة الصفرية ليست داخلية فيها.

لذا ستكون المجموعة $\{\sigma^k(x)\}_{k\in Z} \cup (x_i = ٠)_{i\in Z}$ مجموعة مغلقة لأننا أضفنا المتتابعة الصفرية لها٢ ) إذا كانت $S=\{٠،١\}$ وكانت ٠١ , ١٠ هما القطعتان المسموح بهما فقط في مجموعة المتتابعات $Y$ فأن $Y$ مجموعة مغلقة حسب مبرهنة (١٩) وكذلك كونها منتهية لا تضم إلا

$$x = \ldots\ ٠\ ١\ ٠\ ١\ ٠\ .\ ١\ ٠\ ١\ ٠\ ١\ \ldots$$

$$\sigma(x) = \ldots\ ٠\ ١\ ٠\ ١\ ٠\ ١\ .\ ٠\ ١\ ٠\ ١\ \ldots$$

حيث $\sigma^{٢}(x)= x$ ▬.

مبرهنة(٢٥):المجموعة المنتهية في $X(S)$ ليس لها نقاط غاية وكل نقطة فيها هي نقطة حدودية .

البرهان: لتكن $A$ مجموعة منتهية في $X(S)$ تحتوي على $n+١$ من النقاط (حيث $n$ عدد طبيعي) ولتكن $a$ نقطة في $A$ فكل متتابعة أخرى $b\neq a$ يوجد $k\in \mathbf{Z}$ بحيث $a_k\neq b_k$ فأن الحزمة الأحادية $(a_k^{(k)})$تحوي $a$ من دون $b$

فيوجد $n$ من الحزم الأحادية تحوي $a$ من دون متابعة أخرى تقاطع تلك الحزم الأحادية ( وعددها $n$ ) يعطينا حزمة

نونية $B$ تحوي $a$ من دون باقي النقاط $\Leftarrow (B/\{a\})\cap A=\varnothing \Leftarrow a$ ليست نقطة غاية لـــ $A$ وهذا صحيح لكل النقاط في $A$ وبما أن الحزمة النونية مجموعة غير منتهية فلا يمكن أن تكون جزءا من مجموعة منتهية فأن $A^\circ=\varnothing$(أي داخل $A$ خالي)ومن التوبولوجيا العامة $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$ وإذا كانت $A$ مغلقة فأن $\overline{A} = A$ هذا يعني أن

$A = \overline{A} = A^\circ \cup \partial A = \phi \cup \partial A = \partial A \Leftarrow A$ هي ذاتها مجموعة النقاط الحدودية $\partial A$ ©.

ملاحظة(٢٦): إذا كانت $x$ متتابعة دورية في المجموعة $\{\sigma^k(x)\}_{k\in Z}$ ليس لا نقاط غاية وكل نقطة فيها حدودية . كونها منتهية يستنتج ذلك من المبرهنة السابقة(٢٦) ®.

قضية(٢٧): متممة المجموعة المنتهية هي مجموعة كثيفة

البرهان: نفرض $A$ مجموعة منتهية من النقاط في$X(S)$ولتكن المتتابعة فأن $a$ نقطة حدودية لـــ $A$ من مبرهنة (٢٦) فـــ(من تعريف النقطة الحدودية)$a$ ليست في داخل$A$ ولا تنتمي لخارج $A$(داخل $A^c$ )فأنها لا تنتمي لداخل $A^c$ ولا لخارجها(داخل $A$)فـــ$a$ حدودية لـــ$A^c$

$$\Leftarrow \overline{A^c} = (A^c)^\circ \cup \partial(A^c) = A^c \cup A = X(S)$$

($(A^c)^\circ = A^c$)لأن$A^c$مفتوحة من نتيجة (١٦) و$\partial(A^c) = A$ من البرهان) فأن $A^c$ مجموعة كثيفة ©.

ممهدة (٢٨): إذا كانت$Y$يعرف عليها SFT فأن $Y^c$ مجموعة كثيفة .

البرهان: لتكن $X=Y^c$ ومن مبرهنة (١٧) $X$ مفتوحة ومن التوبولوجيا العامة $X^\circ=X$

لنتأمل النقاط التي لا تنتمي لـــ $X$ فلتكن$y\in Y$ فيوجد مجموعة من القطع الممنوعة لا تظهر في متتابعات $Y$

وبالتالي لا تظهر في $y$ .لتكن $V=y_i \dots y_j$ قطعة مسموح بها في $y$ألاسطوانة $V_i$ تحوي $y$ وتحوي نقاط في$Y$ وفي $X$

فلو كانت $W= x_1 \dots x_n$ قطعة ممنوعة في$Y$ فالاسطوانة $W_p V_i = x_1^p \dots x_n^{i-1} y_i^i \dots y_j^j$ تحوي متتابعات في$X$ وهي مجموعة جزئية من ألاسطوانة الأولى هذا يعني أن كل اسطوانة تحوي$y\in Y$ تحوي نقاطا في$X$ فأن $y$ ليست داخلية في $Y$ وهي بالطبع ليست داخلية في $X$ فأن$y$ حدودية لـــ $X$ وهذا لكل $y\in Y$ فأن $\partial X = Y$ وأن

$\overline{X} = X^\circ \cup \partial X = X \cup Y = Y^c \cup Y = X(S)$ فأن $X=Y^c$ مجموعة كثيفة ©.

مبرهنة(٢٩): إذا كانت $Y$ مجموعة يعرف عليها SFT فالعبارات الآتية تحقق : -

١ ) كل نقطة في $Y$ هي نقطة غاية لها إذا كانت $Y$ غير منتهية

٢ ) مجموعة النقاط الحدودية لـــ $Y$ هي كل نقاطها ٣ ) داخل $Y$ خالي .

البرهان : ١ ) لتكن

$$y = \dots PQR \dots$$

متتابعة في $y$ حيث $P,Q,R$ قطع مسموح بها . نلاحظ أن المتتابعة

$$x = \dots WP.QRW \dots$$

( حيث $W$ قطعة مسموح بها ) لا تظهر في $y$ ولكن المجموعة الاسطوانية التي تحوي كل المتتابعات بالصورة

$$\dots .Q \dots$$

أي المتتابعات التي تأتي فيها القطعة $Q$ بعد صورة الــ -١ مباشرة(أي من صورة الصفر)تحوي النقطتين $x$، $y$ فكل اسطوانة تحوي$y$ تحوي نقطة أخرى $x$ في$Y$ وذلك ممكن طالما أن$Y$غير منتهية اذ يوجد عدد من القطع المسموح بها وليست قطعة واحدة فقط لذا فتكون $y$ نقطة غاية لــ $Y$

٢) من التوبولوجيا العامة $\partial Y = \overline{Y} \cap \overline{Y^c}$ ومن مبرهنة (١٧) $Y$ مغلقة فمــن التوبولوجيــا العامة $Y = \overline{Y}$.

من ممهدة (٢٨) $\overline{Y^c} = X(S)$ **فأن** $\partial Y = \overline{Y} \cap \overline{Y^c} = Y \cap X(S) = Y$

٣ )من تعريف النقطة الحدودية فالنقطة الحدودية لــ $Y$ لا يمكن أن تكون في داخل $Y$ فداخل $Y$ خالي ©.

ممهدة (٣٠): $([P(S)]^c)' = X(S)$

البرهان: لتكن $x \in P(S)$ أي أن $x$ متتابعة دورية تكتب بالصورة

$$x = \dots \overset{i-1}{Q}\ \overset{i}{Q}\ \overset{i+1}{Q} \dots$$

نلاحظ أن $y \notin P(S)$ولكن $Q_i$ هي ألاسطوانة التي تحوي $x, y$ والاسطوانة $Q_{i+n}$ تحوي $\sigma^n(x)$ الموجودة في$P(S)$ و تحوي $\sigma^n(y)$ الغير الموجودة في$P(S)$ هذا يعني لكل نقطة في $P(S)$ ممكن أن نجد اسطوانة تحويها و تحوي نقطة أخرى في$[P(S)]^c$ أي أن كل نقطة في $P(S)$ هي نقطة غاية لـــها .

حيث $Q$ قطعة معرفة على $S$ . لنتأمل المتتابعة

$$y = \dots \overset{i-1}{P}\ \overset{i}{Q}\ \overset{i+1}{R} \dots$$

حيث $P,R$ قطعتان مختلفتان على $S$ وتختلفان عن $Q$

كذلك لتكن $y$ متتابعة غير موجودة في $P(S)$ والتي تكتب بالصورة الآتية

$$y = \dots \overset{i-1}{P}\ \overset{i}{Q}\ \overset{i+1}{R} \dots$$

حيث $P,R, Q$ قطع على $S$ مختلفة عن بعضها ونلاحظ أن $y$ موجودة في ألاسطوانة $Q_i$ و ممكن أن تضم المتتابعة

$$z = \dots \overset{i-1}{R}\ \overset{i}{Q}\ \overset{i+1}{P} \dots$$

الموجودة في$[P(S)]^c$ و أنه من الممكن كتابة أكثر من متتابعة في$[P(S)]^c$ وموجودة في ألاسطوانة $Q_i$ وهكذا لأي اسطوانة تحوي $y$ .فكل متتابعة ثنائية هي نقطة غاية لـــ$[P(S)]^c$ ©.

مبرهنة(٣١): العبارات الآتية تتحقق

١) $[P(S)]^c$ مجموعة كثيفة ٢) كل متتابعة ثنائية هي نقطة حدودية لــ $[P(S)]^c, P(S)$

٣) كل من داخل $P(S)$ ومتممتها مجموعة خالية .

البرهان : ١) من ممهدة (٣١) لدينا $([P(S)]^c)' = X(S)$ فأن

$$\overline{([P(S)]^c)} = ([P(S)]^c) \cup ([P(S)]^c)' = ([P(S)]^c) \cup X(S) = X(S)$$

$\therefore$ $[P(S)]^c$ مجموعة كثيفة

٢) من التوبولوجيا العامة $\partial\{[P(S)]\} = \overline{[P(S)]} \cap \overline{\{[P(S)]^c\}}$

إذن
$$\partial\{[P(S)]^c\} = \overline{\{[P(S)]^c\}} \cap \overline{\{[P(S)]^c\}^c} = \overline{\{[P(S)]^c\}} \cap \overline{[P(S)]} = \overline{[P(S)]} \cap \overline{\{[P(S)]^c\}} = \partial\{[P(S)]\}$$

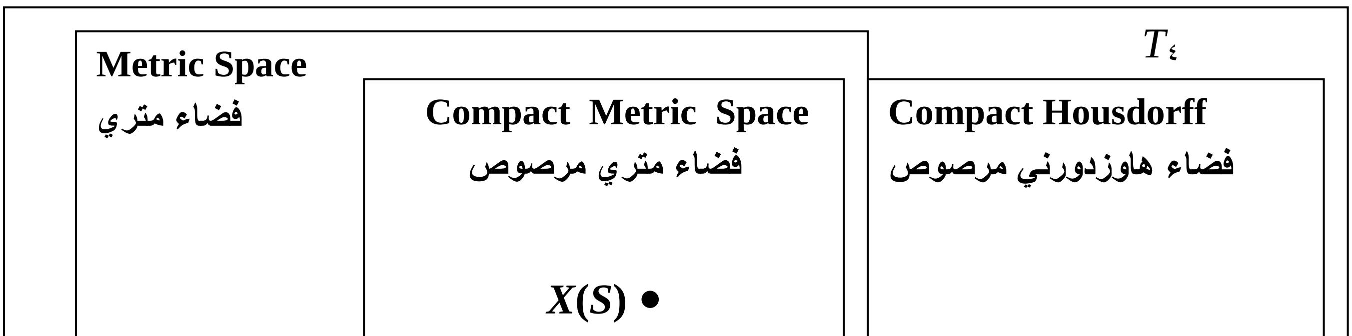
بما أن$P(S)$ كثيفة من مبرهنة (٢١) وكذلك متممتها من ١) $\Leftarrow$
$\partial[P(S)]^c = \partial[P(S)] = X(S) \cap X(S) = X(S)$

٣ ) كل نقطة حدودية ليست في داخل المجموعة ولا داخل في متممتها فمن ٢) داخل $[P(S)]$ ومتممتها خاليتان©.

**X(S) ومسلمات الفصل**

أن $X(S)$ هو مثال لفضاء متري مرصوص أي أن الفضاءات من نوع $T_4$ قد تكون مترية أو قد تكون هاوزدورفيه

مرصوصة أو لا تكون أي من هذه الفضاءات . كما في الشكل التوضيحي الآتي الذي يوضح أن الفضاء $X(S)$ فضاء متري مرصوص ( كل فضاء متري هو هاوزدورفي)



وبمجرد تعريف دالة مسافة على هذا الفضاء سيكون متريا يحقق شرط $T_{٠},T_{١},T_{٢},T_{٣},T_{٤}$ (كـل $T_{i+١}$ هو $T_i$) لذا تكتفي المصادر ببيانه متريا فبالتالي يكون $T_{٤}$ والذي هـو بـدوره $T_{٣}$ وهكـذا وسنقوم للاطلاع والتوضيح ببيان أن هذا الفضاء هو من نوع $T_{٠},T_{١},T_{٢}$ لأهمية هذه الشروط.

مبرهنة(٣٤) : $X(S)$ من نوع $T_{١}$ (فضاء فريشة)

البرهان: لتكن $x\neq y$ متتابعتان في $X(S)$ . من القضية (١٥) $(X(S)-\{x\})$ مجموعـة مفتوحـة تحوي $y$ و $(X(S)-y)$ مجموعة مفتوحة تحوي $x$ فيكون $X(S)$ من نوع $T_{١}$©.

بهذه الطريقة يتم إثبات أن كل فضاء فيه المجموعة المفردة مغلقة يكـون $T_{١}$ والعكـس أيضا صحيح ومنه (بعد إثبات أن $X(S)$ هو من نوع $T_{١}$) نعرف أن كل مجموعة مفردة في $X(S)$ مغلقة إلا أننا سلكنا مسلك آخر (قضية (١٥)).

مبرهنة(٣٥): $X(S)$ من نوع $T_{٢}$ ( فضاء هاوزدورف )

البرهان: ليكن $x,y\in X(S)$ بحيث $x\neq y$ فيوجد $k$ بحيث $x_k\neq y_k$ الحزمة الأحادية $(y_k^{(k)})$ تحوي $y$ من دون $x$ وكذلك الحزمة الأحادية $(x_k^{(k)})$ تحوي $x$ من دون $y$ وكذلك $(x_k^{(k)})\cap(y_k^{(k)})=\phi$ فأن $X(S)$ من نوع $T_{٢}$©.

الآن إذا كأن $X(S)$ مرصوصا فيكون من نوع $T_{٤}$ وكذلك إذا كأن متريا كما في الشكل السابق . لقد بينت العديد من المصادر أن $X(S)$ فضاءا متريا بتعريف دالة مسافة عليه [H]

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 & if \quad x=y \\ \dfrac{1}{1+k} & if \quad x\neq y \end{cases}$$

حيث $k=\min\{|j| : x_j\neq y_j\}$ وقامت مصادر أخرى بتعريف دالة المسافة الآتية [B]

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & if \quad x=y\\ 2^{-k} & if \quad x\neq y\end{cases}$$

كما عرفت $k$ أعلاه

**فضاء المتتابعات الثنائية و التراص**

بعد أن بينا أن $X(S)$ فضاءا متريا يعني أن نبين أنه مرصوص أن $X(S)$ فضاء مرصوصا كونه مكافئ للفضاء $S^{\infty}$ (مبرهنة ١١) ولما كأن $S^{\infty}$ حاصل ضرب غير منتهي للفضاء المعرف $S$ . و $S$ مجموعة منتهية والفضاء المعرف يكون مرصوصا إذا عرف على مجموعة منتهية ( من التوبولوجيا العامة [D]). ومن التوبولوجيا العامة أيضا الفضاء المعرف على حاصل ضرب عدد منتهي أو غير منتهي لفضاءات مرصوصة يكون مرصوصا [D] . وأيضا الصورة المستمرة لفضاء مرصوص يكون مرصوصا فمن(مبرهنة ١١) $X(S)$ يكون مرصوصا .ولكننا سنتبع إسلوبا آخر في برهان تلك النظرية بدلالة القاعدة الجزئية .

ترميز(٣٥): $B_i$ هي عائلة كل الحزم الأحادية للعنصر $i\in \mathbf{Z}$ أي أن $B_i$ عائلة منتهية من الحزم الأحادية وممكن أن تكتب بالشكل $B_i=\{a^{(i)}\}_{a\in S}$ حيث $S$ مجموعة رموز.

مبرهنة (٣٦): لكل عائلة من الحزم الأحادية تغطي$X(S)$ يوجد $i\in \mathbf{Z}$ بحيث $B_i$ يكون جزءا من تلك العائلة .

البرهان: لتكن $\{F_\alpha\}$ عائلة من الحزم الأحادية التي تغطي$X(S)$ ولنفرض أنه لكل $B_i$ , $i\in \mathbf{Z}$ ليست جزءا من$\{F_\alpha\}$ هذا يعني وجود حزمة أحادية $\{F_\alpha\}$ $(a_k^{(i)})\notin$ حيث$a_k$ حرف في الأبجدية $S$ المنتهية وليكن $r$ عدد عناصرها و لتكن $a_0, a_1,\ldots a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_{r-1}$ باقي عناصر $S$ فأن

$$(a_0^{(i)})\cup(a_1^{(i)})\cup\ldots\cup(a_k^{(i)})\cup\ldots\cup(a_{r-1}^{(i)})=X(S)$$

لتكن $$G=(a_0^{(i)})\cup(a_1^{(i)})\cup\ldots\cup(a_{k-1}^{(i)})\cup(a_{k+1}^{(i)})\cup\ldots\cup(a_{r-1}^{(i)})$$

فأن $X(S)\neq G$ وأن $X(S)$ = $G \cup (a_k^{(i)}) = X(S)$ وعلى فرض أن العناصر المولدة لــــ $G$ موجودة في $\{F_\alpha\}$( لابد من وجود عدد من الحزم المولدة لــ $G$ في $\{F_\alpha\}$ لمعظم $i\in \mathbf{Z}$ وإلا كانت $\{F_\alpha\}$منتهية عدد عناصرها اقل من $r$

أو خالية فلا يمكن أن تغطي $X(S)$). فيوجد حزمة أحادية $(a_k^{(i)})$على الأقل لا تنتمي لــــ $\{F_\alpha\}$ واتحادها مع عدد منتهي من عناصر $\{F_\alpha\}$ يغطي $X(S)$ وذلك لكل $i\in \mathbf{Z}$ هذا يعني أن لكل $i\in \mathbf{Z}$ يوجد حزمة أحادية أو أكثر غير موجودة في $\{F_\alpha\}$ واتحادها مع عدد منتهي من عناصر$\{F_\alpha\}$يغطي$X(S)$ فالعائلة $\{F_\alpha\}$ لا تغطي $X(S)$ وهذا تناقض فــ $B_i$ جزءا من $\{F_\alpha\}$©.

مبرهنة(٣٨) : $X(S)$ فضاءا مرصوصا

البرهان: من التوبولوجيا العامة الفضاء التوبولوجي مرصوص إذا كان كل غطاء قاعدي جزئي ( غطاء مؤلف من مجموعات في القاعدة الجزئية ) مفتوح يوجد غطاء جزئي [S] .

لنأخذ عائلة من الحزم الأحادية $\{A_\gamma\}$ بحيث $\bigcup_\gamma A_\gamma = X(S)$ من مبرهنة٣٧ $\beta_i = \{\alpha_j^{(i)}\}_{j=0}^{r-1}$ عائلة جزئية من$\{A_\gamma\}$. لكن $\bigcup_{j=0}^{r-1} (\alpha_j^{(i)}) = X(S)$ فأن $\beta_i$ غطاءا جزئيا للفضاء $\{A_\gamma\}$ فأن$X(S)$ مرصوص©.

ملاحظة(٣٩) : طالما أن $X(S)$ فضاء هاوزدورف مرصوص فمن التوبولوجيا العامة $A\subset X(S)$ تكون مرصوصة إذا وإذا فقط كانت مغلقة كسائر الفضاءات المرصوصة من نوع $T_2$®.

يتضح من الملاحظة السابقة أن المجموعات المغلقة كالحزم والمجموعات المنتهية والمجموعات التي يعرف عليهاSFTمرصوصة والمجموعات المفتوحة الغير مغلقة وأي مجموعة غير مغلقة ليست مرصوصة .

**الاتصال وفضاء المتتابعات الثنائية**

الآن سنختم دراستنا بموضوع الاتصال .

ملاحظة(٣٩) : طالما أن $X(S)$ فضاء هاوزدورف مرصوص فمن التوبولوجيا العامة $A\subset X(S)$ تكون مرصوصة

إذا وإذا فقط كانت مغلقة كسائر الفضاءات المرصوصة من نوع $T_2$®.

يتضح من الملاحظة السابقة أن المجموعــات المغلقــة كــالحزم والمجموعــات المنتهيــة والمجموعات التي

يعرف عليهاSFTمرصوصة والمجموعات المفتوحة الغير مغلقة وأي مجموعة غير مغلقــة ليست مرصوصة .

مبرهنة(٤٠) : الفضاء $X(S)$ غير متصل

البرهان: $\beta_i = \{\alpha_j^{(i)}\}_{j=0}^{r-1}$ غطاء لــ $X(S)$ فأن $X(S) = \bigcup(\alpha_j^{(i)})_{j=0}^{r-1}$

ولكن $(a^{(i)})\cap(b^{(i)}) = \emptyset$ لأي حرفين مختلفين $a, b \in S$ فأن $X(S)$ فضاء منفــصل غيــر متصل وكذلك من التوبولوجيا العامة الفضاء $Y$ يكون متصل إذا وإذا فقط كانــت $Y$ و $\emptyset$ همــا المجموعتان الوحيدتان اللتان تكونان مغلقة ومفتوحة في الوقت ذاته وهذا لا يتحقق في $X(S)$ ©.

**References**


**[B]** ***Algebraic Aspects of Symbolic Dynamics*** by ***Mike Boyle,*** (lectures) ١٩٩٨.

**[CHR] E.Coven,G. Hedlund and F.Rhodes** ***The Commuting Block Maps Problem***
Trans. American Mathematical Society.volume.٢٤٩, Number١, April(١٩٧٩) ١١٣-١٣٨

**[D] J. Dugundji** ***Topology*** Allyn and Bacon Inc.,(١٩٦٦).

**[H] G.A. Hedlund** ***Endomorphisms and Automorphisms of Shift Dynamical*** Mathematical System theory ٣ (١٩٦٩) ٣٢٠-٣٧٥

**[L] S.Lipschutz** ***General Topology*** McGraw-Hill book Company(Shaums outline series), (١٩٥٠)

**[LM] D.Lind and B.Marcus An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding** Cambridge University Press, (١٩٩٥).

**[M] J.Munkers** ***"Topology, a First Course"*** Prentice-Hall Inc,(١٩٧٥)

**[S] G. F. Simmons** ***Topology and Modern Analysis*** McGraw-Hill book Company**,** (١٩٦٣)

**[Si] B. T. Sims** ***Fundamentals of Topology*** Macmillan Publishing Co.,INC & Collier Macmillan Publishers , LTD **,**(١٩٧٦)