The L^P-spaces of functions from the n-dimensional real space to the N-dimensional quaternionic space

Hussien A. H. Abugirda*, Mohammed Kh. Abdullah, Khaldoun S. Al-Yasiri
Department of Mathematics, College of Science, University of Basrah, Basrah, Iraq

Abstract

In this paper, we introduce new definitions of the $\boldsymbol{L^P}$- spaces, $\boldsymbol{1 \leq P \leq \infty}$, namely the $\boldsymbol{L^P(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^N)}$ - spaces, $\boldsymbol{1 \leq P \leq \infty}$. Here, n and N are natural numbers that are not necessarily equal, such that $n, N \geq 1$. The space $\mathbb{R}^n$ refers to the n-dimensional Euclidean space, $\mathbb{H}$ refers to the quaternions set and $\mathbb{H}^N$ refers to the N-dimensional quaternionic space. Furthermore, we establish and prove some properties of their elements. These elements are quaternion-valued N-vector functions defined on $\mathbb{R}^n$, and the $\boldsymbol{L^P}$ spaces have never been introduced in this way before.

Keywords: Hamiltonian skew field of quaternions, Quaternion N-vectors, Quaternion-valued functions, $L^{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^N)$ spaces, $L^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^N)$ space.

فضاءات L^P لدوال من الفضاء الحقيقي ذو البعد n الى فضاء المركبات الرباعية ذو البعد N

حسين علي حسين البوكرده*, محمد خلف عبد الله, خلدون سعد غالب

قسم الرياضيات, كلية العلوم, جامعة البصرة, البصرة, العراق

الخلاصة

في هذا البحث نقدم تعريف جديد للفضاءات $\boldsymbol{L^P}$, $\boldsymbol{1 \leq P \leq \infty}$, وهو تعريف الفضاءات $\boldsymbol{L^P(\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^N)}$, $\boldsymbol{1 \leq P \leq \infty}$, هنا n و N هما عددان طبيعيان ليس من الضروري أن يتساويان وهما يحققان $n, N \geq 1$. الفضاء $\mathbb{R}^n$ يشير الى الفضاء الإقليدي ذات البعد n و $\mathbb{H}$ تشير الى مجموعة الرباعيات و $\mathbb{H}^N$ تشير الى فضاء المتجهات ذات البعد N بمركبات رباعية. علاوة على ذلك نقدم مع البرهان بعض خصائص العناصر لهذه الفضاءات. هذه العناصر هي عباره عن دوال إتجاهية ذات بعد N بمركبات رباعية وهي معرفة على $\mathbb{R}^n$, وإن الفضاءات $\boldsymbol{L^P}$ لم يسبق أن قدمت بهذا الشكل من قبل.

1. Introduction

There have been a vast number of studies on the real quaternions set $\mathbb{H}$ (which is sometimes called the Hamiltonian skew field of quaternions) since it has been introduced for the first time in 1843 by W. R. Hamilton [1] and [2]. Technological improvements have been provided when the real quaternions are put into practice and it has been studied in different areas like geometry, algebra, computer-aided design, and physics.