"Vectors" المتجهات

محاضرات الجبر الخطي

١٤٩

د. عقيل هاشم حسين

(١) : المتجهات "Vectors"

Magnitude

تعريف المتجهات : تعريف المتجهات بأنها الكميات التي تحتوي على مقدار واتجاه، أتجاه Direction بأبعاد المسافة مثل القوة، السرعة، المجال الكهربائي، المجال المغناطيسي، الإزاحة ... الخ.

* يرمز للمتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ بأن $\overrightarrow{AB}$ تعني نقطة البداية A و B تعني نقطة النهاية، ومقدار المتجه $\overrightarrow{A}$ يرمز له بالرمز $|\overrightarrow{A}|$

الكميات غير المتجهة scalars

:---- وهي عبارة عن كميات لها مقدار وليس لها اتجاه مثل المسافة/المساحة/الحجم/الزمن/درجة الحرارة/الكثافة ... الخ

جبر المتجهات Vectors Algebra

:----

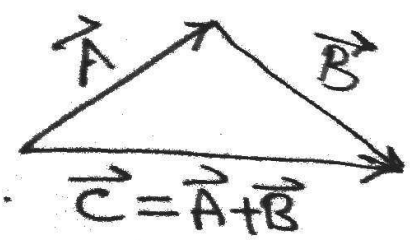
(أ) المتجه $\overrightarrow{A}$ يساوي المتجه $\overrightarrow{B}$ اذا كان فقط لهما نفس المقدار والأتجاه

$$\overrightarrow{A}=\overrightarrow{B} \quad \text{and} \quad |\overrightarrow{A}|=|\overrightarrow{B}|$$

(ب) المتجه الذي له نفس مقدار المتجه $\overrightarrow{A}$ لكن يعاكسه في الأتجاه هو $-\overrightarrow{A}$

$$\overrightarrow{A}=-(-\overrightarrow{A}) \quad ; \quad \overrightarrow{A}\uparrow \text{ و } -\overrightarrow{A}\downarrow$$

(ج) محصلة المتجهين $\overrightarrow{A}$ و $\overrightarrow{B}$ هو متجه آخر مثل $\overrightarrow{C}$ حيث أن $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=\overrightarrow{C}$



(د) الفرق بين المتجهين $\overrightarrow{A}$ و $\overrightarrow{B}$ هو متجه آخر مثل $\overrightarrow{C}$ بحيث أن

$$\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}=\overrightarrow{C}$$

وفي حالة كون $\overrightarrow{A}$ يساوي $\overrightarrow{B}$ فان $\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}=0$ ويسمى المتجه الصفري

(ه) يمكن ضرب المتجه بكمية قياسية (عددية) والناتج يعطي متجه جديد مثل $\vec{C}$

$\vec{C} = m\vec{A}$ where m is scalar

if $m=0 \Rightarrow 0(\vec{A}) = 0$ المتجه الصفري

ملاحظة :- المتجه الصفري هو يشبه المقدار القياسي وله أي اتجاه.

(و) متجه الوحدة (unit vector)

ويعرف بالعلاقة :-

$$\vec{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

$\vec{a}$: متجه وحدة — $\vec{A}$: المتجه — $|\vec{A}|$: مقياس المتجه

ويكون بنفس أتجاه المتجه ولا يساوي صفر.

(ع) قوانين المتجهات «Laws of Vector Algebra»

① $\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$ (قانون التبادل)

② $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$ (قانون الشاركة)

③ $m\vec{A} = \vec{A}m$ where m is a real number (حيث عدد حقيقي)

④ $m(n\vec{A}) = (mn)\vec{A}$; m and n real numbers

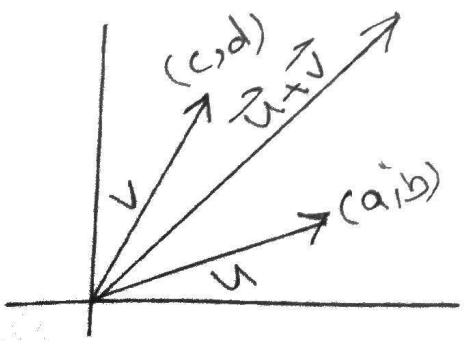
⑤ $(m+n)\vec{A} = m\vec{A}+n\vec{A}$

⑥ $m(\vec{A}+\vec{B}) = m\vec{A}+m\vec{B}$ (قانون التوزيع)

جمع النقاط

:- أذا كانت النقطتان (a,b) و (c,d) هما نهايتي المتجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

فالنقطة التي احداثياتها (a+c , b+d) هي نهاية المحصلة $(\vec{u}+\vec{v})$



example:

$A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ and $B=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ هما نقطتان في الفضاء n / عندئذٍ يكون A+B هي نقطة أيضاً في الفضاء n (n-space) حيث أن احداثيات النقطة A+B هي

$$A+B=(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$$

example:

① $A=(-1,1)$; $B=(2,7)$ نقطتان في الفضاء x,y

$\Rightarrow A+B=(1,8)$ نقطة في الفضاء x,y أيضاً

② $A=(-1,0,1)$; $B=(-3,0,9)$ نقطتان في الفضاء (x,y,z)

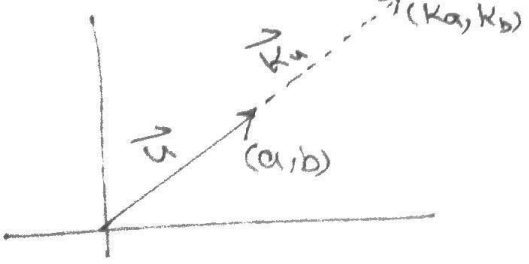
$\Rightarrow A+B=(-4,0,10)$ نقطة أيضاً في الفضاء (x,y,z)

العرب بواسطة عدد

"multiplication by a scalar"

أذا كانت النقطة التي احداثياتها $\vec{u}$ هي نهاية المتجه $\vec{u}$ (a,b) حيث k مقدار ثابت (Ka, Kb)

فان النقطة التي احداثياتها هي نهاية المتجه $\vec{Ku}$ كما في الشكل:



حيث نرى أن المتجه $\vec{u}$ قد توسعت مركبته

example:-

let $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ نقطة في الفضاء n

r is scalar (عدد)

$\therefore rA=r(a_1,a_2,\dots,a_n)$ rA يكون نقطة في الفضاء n

$\therefore rA=(ra_1,ra_2,\dots,ra_n)$ in n-space

Example:-

① $A=(-2,2)$; $r=-1$ $\Rightarrow rA=(2,-2)$ نقطة في الفضاء x,y

② $A=(5,-5,1)$; $r=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow rA=(\frac{5}{2},\frac{-5}{2},2)$ نقطة في الفضاء x,y,z

example:

$A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ and $B=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ هما نقطتان في الفضاء n / عندئذٍ يكون $A+B$ هي نقطة أيضاً في الفضاء n (n-space)
حيث أن احداثيات النقطة $A+B$ هي

$$A+B=(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$$

example:

① $A=(-1,1)$; $B=(2,7)$ — نقطتان في الفضاء x,y

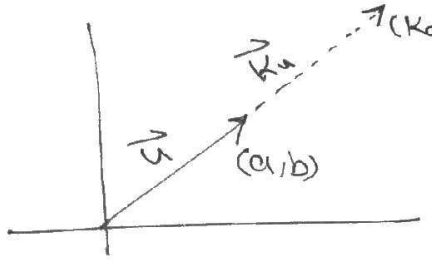
فان $\Rightarrow A+B=(1,8)$ — نقطة في الفضاء x,y أيضاً

② $A=(-1,0,1)$; $B=(-3,0,9)$ — نقطتان في الفضاء (x,y,z)

$\Rightarrow A+B=(-4,0,10)$ — نقطة أيضاً في الفضاء (x,y,z)

الضرب بواسطة عدد — "multiplication by a scalar"

أذا كانت النقطة التي احداثياتها (a,b) هي نهاية المتجه $\vec{u}$
فان النقطة التي احداثياتها (Ka, Kb) حيث K مقدار ثابت
هي نهاية المتجه $K\vec{u}$ كما في الشكل:



حيث نرى أن المتجه $\vec{u}$ قد توسعت مركبته

example:-

let $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ — نقطة في الفضاء n

& r is scalar (عدد)

$\therefore rA=r(a_1,a_2,\dots,a_n)$ — rA يكون نقطة في الفضاء n

$\therefore rA=(ra_1,ra_2,\dots,ra_n)$ in n-space

Example:-

① $A=(-2,2)$; $r=-1 \Rightarrow rA=(2,-2)$ — نقطة في الفضاء x,y

② $A=(5,-5,4)$; $r=\frac{1}{2} \Rightarrow rA=(\frac{5}{2},-\frac{5}{2},2)$ — نقطة في الفضاء x,y,z

③ $A=(1,1,1)$; $r=0 \Rightarrow rA=(0,0,0)$ — نقطة في الفضاء x,y,z

* أن الكمية التي تحتوي على طول وأتجاه تسمى كمية أتجاهية

متجه الموضع located vector

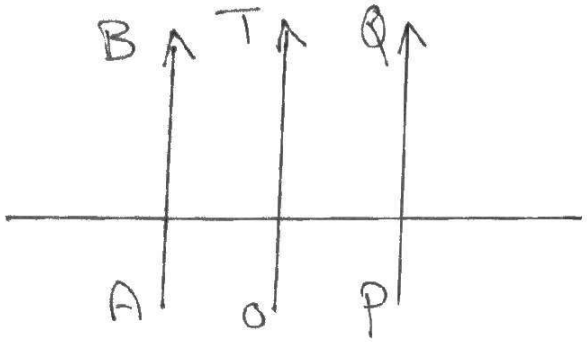
* أن متجه الموضع هو زوج مرتب من النقاط (P,Q) يرمز له بالرمز $\overrightarrow{PQ}$ تكون نقطة P هي نقطة البداية ونقطة Q نقطة النهاية

* أن متجه الموضع $\overrightarrow{OP}$ حيث نقطة O هي نقطة الأصل يكون موضع هذا المتجه $\overrightarrow{OP}$ عند نقطة P

* المتجه $\overrightarrow{PQ}$ يكون موضعه عند النقطة P

المتجهان المتساويان "Two equal vectors"

يكونان المتجهان الموضعيان متساويان أذا كانا بنفس المقدار من الطول وبنفس الأتجاه في الشكل :-



المتجه $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{AB}$ متساويان

نختار نقطة ثابتة O ونرسم المتجه $\overrightarrow{OT}$ يكون مساوياً للمتجه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{PQ}$

فاذا كانت نقطة $P=(x_1,x_2,x_3)$

ونقطة $Q=(y_1,y_2,y_3)$

$\because \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OT}$

حيث $O=(0,0,0)$ فأن

$T=Q-P=(y_1-x_1, y_2-x_2, y_3-x_3)$

مثال :- ليكن $\overrightarrow{PQ}$ متجه موضع بحيث أن $P=(-1,2,1)$ و $Q=(0,-2,1)$

جد المتجه $\overrightarrow{OT}$ بحيث يكون $\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{PQ}$

الحل :- المتجه $\overrightarrow{OT}$ يكون أبتداءه بنقطة الأصل $(0,0,0)$ وأنتهاؤه بنقطة T

$\because \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OT}$

$\therefore T=Q-P$? (أثبت ذلك)

$\therefore T=Q-P=(0,-2,1)-(-1,2,1)=(1,-4,0)$

حيث $\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{PQ}$; $\therefore \overrightarrow{OT}=-\vec{i}-4\vec{j}$

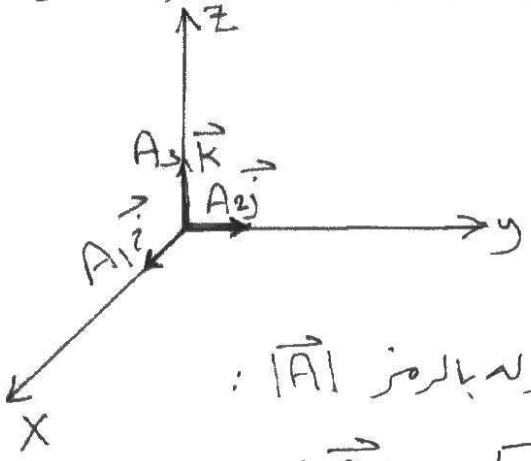
واجب بيتي (H.W) :- ليكن المتجه $\overrightarrow{AB}$ متجه موضع بحيث أن $A=(-1,1)$ and $B=(1,3)$

⑤ جد متجه مساوي لـ $\overrightarrow{AB}$ يكون موضعه عند نقطة الاصل

مركبات المتجه Components of vectors الكارتيزية

* نفرض ان المتجه $\vec{A}$ هو : $\vec{A}=A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}$ فان :

$A_1\vec{i}$ و $A_2\vec{j}$ و $A_3\vec{k}$ هي مركبات المتجه $\vec{A}$ وفي نفس اتجاه المحاور الثلاث وكما في الشكل :-



حيث مقدار المتجه $\vec{A}$ من العلاقة التالية ويرمز له بالرمز $|\vec{A}|$:

$$|\vec{A}|=\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2} \quad \text{---} \circledast$$

ملاحظة :- ليكن R مجال الاعداد الحقيقية

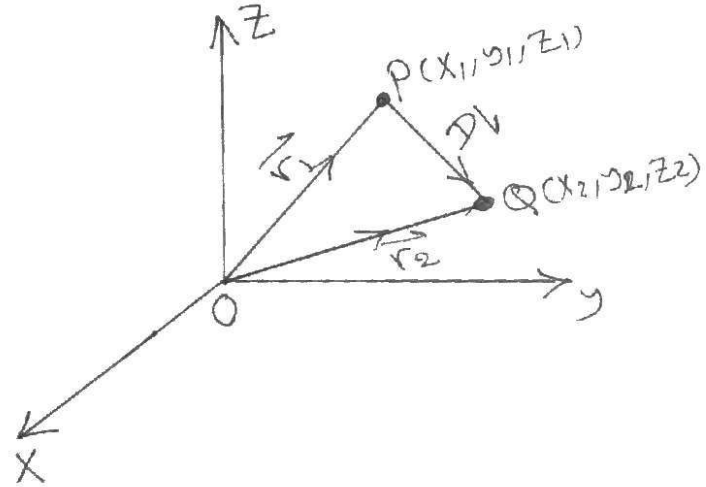
ملاحظة :- يعرف المتجه القياسي بانه المتجه الذي بداية نقطة الاصل ونهايته أي نقطة في الفضاء.

* اذا كانت $P=(X_1,Y_1,Z_1)$ و $Q=(X_2,Y_2,Z_2)$ فان المتجه $\vec{A}=\overrightarrow{PQ}$ هو :-

$$\vec{A}=\overrightarrow{PQ}=(X_2-X_1)\vec{i}+(Y_2-Y_1)\vec{j}+(Z_2-Z_1)\vec{k}$$

وتكون قيمة المتجه

$$|\vec{A}|=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2+(Z_2-Z_1)^2}$$

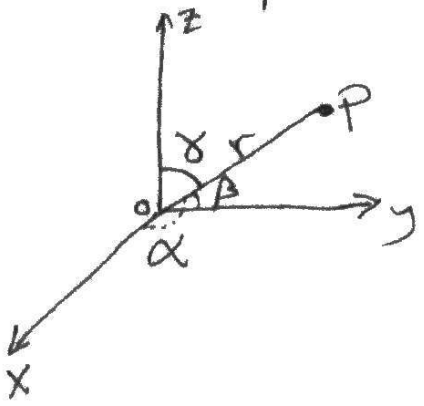


* إذا كانت الزوايا $\alpha / \beta / \gamma$ يصنعها المتجه $\overrightarrow{OP}$ مع المحاور الثلاث X و Y و Z على الترتيب

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} \quad , \quad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|}$$

حيث $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

كذلك $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$



ويمكن اثبات هذه العلاقة من الشكل

$$\because \cos\alpha = \frac{x}{|r|}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|r|}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|r|}$$

$$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

حيث ان $|\vec{r}| = r$

* تعريف متجهان متوازيان Definition of two Parallel vectors

المتجهان الموضعيان $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{PQ}$ يكونان متوازيان إذا حققا العلاقة

$$\boxed{B - A = r(Q - P)} \quad \text{where } r \neq 0$$

حيث

ملاحظة :- إذا كان $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{PQ}$ متجهان موضعيان متوازيان عندئذٍ

① $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{PQ}$ بنفس الاتجاه اذا كان $r > 0$

② $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{PQ}$ يكونان باتجاهين متعاكسين اذا كان $r < 0$

Example :- $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{PQ}$ متجهان موضعيان

$A = (3, 7)$ ، $B = (-4, 2)$

$P = (5, 1)$ و $Q = (-16, -14)$

نجد $B - A = (-7, -5)$

نجد $Q - P = (-21, -15)$

$$\Rightarrow B - A = r(Q - P) \Rightarrow (-7, -5) = \frac{1}{3}(-21, -15)$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{3}$$

$\because r = \frac{1}{3}$ ، اذن المتجهان $\overrightarrow{AB} / \overrightarrow{PQ}$ بنفس الاتجاه

Exercises

In each case, determine which located vectors $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{PQ}$ are parallel in the same or in opposite direction?

① $A=(0,-1)$, $B=(4,3)$, $P=(-1,5)$, $Q=(7,1)$

② $A=(5,7)$, $B=(9,6)$, $P=(1,4)$, $Q=(-3,5)$

③ $A=(-1,-1,5)$, $B=(-2,3,-4)$, $P=(3,1,1)$, $Q=(-3,9,-17)$

④ $A=(-2,3,-1)$, $B=(-11,3,-28)$, $P=(2,3,4)$, $Q=(1,3,5)$

⑤ $A=(1,-1,1)$, $B=(2,-2,2)$; $P=(0,1,0)$, $Q=(1,1,1)$

ملحوظة :- في حالة ترميز متجه بحرف واحد مثل $\overrightarrow{T}$ هذا يعني أنه $\overrightarrow{OT}$ أي موضعه عند نقطة الأصل.

Rules قوانين :-

① $\vec{P}+\vec{Q}=\vec{Q}+\vec{P}$

② $\vec{P}+(\vec{Q}+\vec{R})=(\vec{P}+\vec{Q})+\vec{R}$

③ $\vec{P}+\vec{O}=\vec{O}+\vec{P}=\vec{P}$ where $\vec{O}$ is called the Zero vector (متجه صفري يدعى)

④ $\vec{P}+(-1)\vec{P}=\vec{O}$

⑤ $r(\vec{P}+\vec{Q})=r\vec{P}+r\vec{Q}$; r any number

⑥ $(r_1+r_2)\vec{P}=r_1\vec{P}+r_2\vec{P}$; r_1, r_2 any numbers

⑦ $(r_1 r_2)\vec{P}=r_1((r_2\vec{P})$

⑧ $1\vec{P}=\vec{P}$ and $0\vec{P}=\vec{O}$

* طول المتجه Norm of vector

:-

كما سبق يعرف طول المتجه $\vec{A}$ بواسطة الرمز $|\vec{A}|$ وكالتالي

$$|\vec{A}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}$$

Example:

① $A=(-3,4) \Rightarrow |\vec{A}| = \sqrt{9+16} = 5$

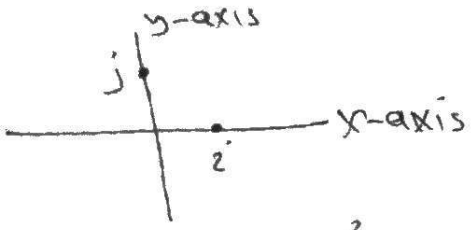
② $A=(-1,3)$, $B=(2,5) \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{(2+1)^2+(5-3)^2} = \sqrt{13}$ الميتر

* متجه الوحدة في المستوي والفضاء "Unit vectors in the plane and space"

المتجه $\vec{A}$ يسمى متجه وحدة unit vector اذا كان يمتلك طول (مقدار) مساوي للواحد $|\vec{A}|=1$ أي:

* متجه الوحدة في المستوى "Unit vector in the plane"

ليكن $\hat{i}$ متجه من نقطة $(0,0)$ الى $(1,0)$ وليكن $\hat{j}$ متجه من $(0,0)$ الى $(0,1)$ كما في الشكل



* المتجه $\hat{i}$ والمتجه $\hat{j}$ هما متجهات وحدة لأن أي متجه له مقدار = 1

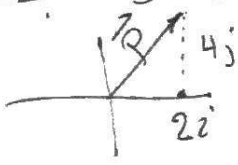
* أي متجه مثل $\vec{A}$ يمكن كتابته بدلالة متجهات الوحدة $\hat{i}$ و $\hat{j}$ كما يلي :-

$\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j}$ حيث النقطة $A=(a_1,a_2)$ نقطة تمثل المتجه $\vec{A}$

مثال محلول :- أوجد المتجه $\vec{P}$ بدلالة متجهات الوحدة $\hat{i}$ و $\hat{j}$ حيث $P=(2,4)$ وارسم هذا المتجه ؟

الحل :- نستطيع أن نحدد متجه نقطة وبالعكس نستطيع أن نستخرج من نقطة متجه

النقطة $P(2,4) \underset{\text{متجه}}{\overset{\text{تمثل}}{\Longleftrightarrow}} \vec{P} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$



واجب من المثال السابق اعلاه اذا كانت النقطة $P=(-1,0)$ أوجد المتجه $\vec{P}$ وارسم المتجه الناتج ؟ وجد مقدار

A)

* مبرهنة :

اذا كان المتجهان $\vec{A}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ ، $\vec{B}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$ فان :

① $\vec{A}+\vec{B}=(a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}$

② $r\vec{A}=(ra_1)\vec{i}+(ra_2)\vec{j}$; r is any number.

Example:- if $\vec{A}=2\vec{i}-3\vec{j}$; $\vec{B}=6\vec{i}+5\vec{j}$

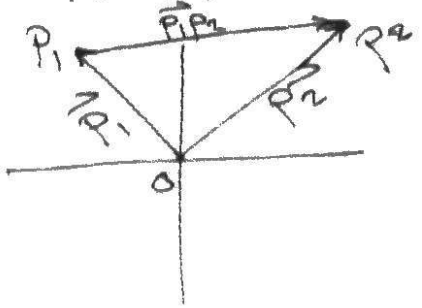
find ① $\vec{A}+\vec{B}$ ② $5\vec{A}$ ③ $|\vec{A}|$ ④ $|\vec{B}|$

مبرهنة

اذا كانت P_2 ، P_1 نقطتان عندئذ

$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$

$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{P_2}-\overrightarrow{P_1}$



البرهان

$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}$

$-\overrightarrow{OP_1}+(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2})=-\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}$

$\therefore(-\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_1})+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$

$\vec{O}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$

$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{P_2}-\overrightarrow{P_1}$

(البرهان بديل مطلوب)

أو بمثلث

$\overrightarrow{P_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{P_2}$

$-\overrightarrow{P_1}+(\overrightarrow{P_1}+\overrightarrow{P_1P_2})=-\overrightarrow{P_1}+\overrightarrow{P_2}$

$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{P_2}-\overrightarrow{P_1}$

نتيجة

if $P_1=(a_1,b_1)$; $P_2=(a_2,b_2)$

$\therefore \overrightarrow{P_1P_2}=(a_2-a_1)\vec{i}+(b_2-b_1)\vec{j}$

واجب بيتي : جد المتجه من النقطة $P_1=(2,-3)$ الى النقطة $P_2(-4,6)$ وارسم المتجه الناتج $\overrightarrow{P_1P_2}$

ملاحظة

* اذا كان $\vec{A}$ متجه غير صفري (له قيمة) فان $\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ هو متجه وحده باتجاه المتجه $\vec{A}$

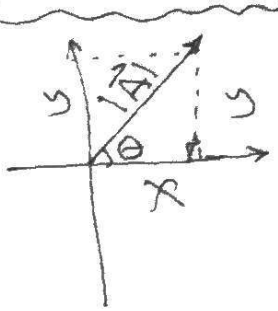
مثال :- جد متجه الوحده باتجاه المتجه $3\vec{i}-4\vec{j}$

$\because \vec{A} = 3\vec{i}-4\vec{j}$

$\therefore \vec{B} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{3\vec{i}-4\vec{j}}{\sqrt{9+16}} = \frac{3\vec{i}-4\vec{j}}{5} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$

* كيفية ايجاد متجه يحوي على طول معروف واتجاه

How to find a vector which it has a known length and direction



let $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\sin\theta = \frac{y}{|\vec{A}|} \Rightarrow y = |\vec{A}|\sin\theta$

$\cos\theta = \frac{x}{|\vec{A}|} \Rightarrow x = |\vec{A}|\cos\theta$

$\therefore \vec{A} = |\vec{A}|(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$

طول — اتجاه

محاولات زوز هي جواب الملك القائم

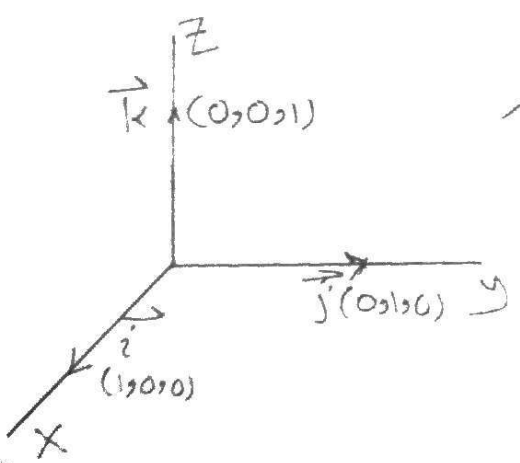
واجب بيتي :- أوجد المتجه $\vec{A}$ والذي مقداره 6 باتجاه $\theta = 120^\circ$

* متجه الوحده في الفضاء "Unit vector in the space"

ليكن $\vec{i}$ متجه من (0,0,0) الى (1,0,0)

$\vec{j}$ " " (0,0,0) to (0,1,0)

$\vec{k}$ " " (0,0,0) to (0,0,1)



* المتجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ هي متجهات وحده بالاتجاه الموجب لمحاور الاحداثيات الثلاث .

* المتجه $\vec{P}$ في الفضاء حيث $P=(a,b,c)$ يمكن أن يكتب كما يلي :

$\vec{P} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

HW:- جد المتجه $\vec{P}$ حيث $P=(-2,4,3)$ وارسم المتجه ؟

ملاحظة:- من الممكن أن نتوسع من الفضاء الثنائي الى الفضاء الثلاثي حيث .

$$\vec{P_1} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

and

$$\vec{P_2} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

* المساواة : $\vec{P_1} = \vec{P_2} \iff a_1=b_1 \; , \; a_2=b_2 \; , \; a_3=b_3$
* الاضافة : $\vec{P_1} + \vec{P_2} = (a_1+b_1)\vec{i} + (a_2+b_2)\vec{j} + (a_3+b_3)\vec{k}$
* الضرب بعدد : $r\vec{P} = (ra_1)\vec{i} + (ra_2)\vec{j} + (ra_3)\vec{k}$
* طول المتجه : $|\vec{P_1}| = |a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

كذلك $\vec{P_1P_2} = \vec{P_2} - \vec{P_1} = (b_1-a_1)\vec{i} + (b_2-a_2)\vec{j} + (b_3-a_3)\vec{k}$

Ex: find the vector from $P_1=(2,2,5)$ to $P_2=(3,-2,4)$

$$\vec{P_1P_2} = \vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$$

* اذا $\vec{P}$ متجه غير صفري في الفضاء الثلاثي فان $\frac{\vec{P}}{|\vec{P}|}$ هو متجه وحده باتجاه المتجه $\vec{P}$

واجب:- جد متجه الوحده باتجاه المتجه $\vec{5i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

* الضرب الداخلي لمتجهين Inner Product of two vectors

* مثال تسمية أخرى للضرب الداخلي وهو الضرب النقطي (dot product) والضرب العددي (Scalar Product) .

* ان الضرب الداخلي (النقطي / العددي) لمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ في الفضاء n هو حاصل ضرب طولي المتجهين وجيب تمام الزاوية بينهما كما يلي :-

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

θ الزاوية بين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

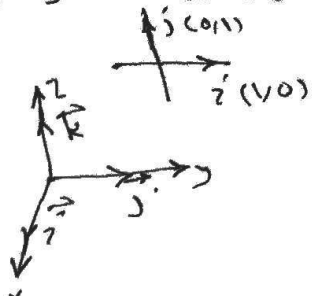
حواص الضرب الداخلي

① $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

② if $\vec{A}\perp\vec{B} \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B}=0$ since $\theta=90^\circ$; $\cos 90=0$

③ in the plane $i\cdot j=j\cdot i=0$

④ in the space $i\cdot j=i\cdot k=j\cdot k=0$



⑤ if $\vec{A}\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow \vec{A}=0$ or $\vec{B}=0$ or $\vec{A}\perp\vec{B}$

⑥ if $\vec{A}\parallel\vec{B}$ and on the same direction $\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|$; $\theta=0$

⑦ خاصية $\vec{A}\cdot\vec{A}=|\vec{A}|^2$; $|\vec{A}|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}=\sqrt{|\vec{A}|^2}$

Examples

① in the plane $i\cdot i=j\cdot j=1$

② in the space $i\cdot i=j\cdot j=k\cdot k=1$

③ $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

④ $r(\vec{A}\cdot\vec{B})=(r\vec{A})\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot(r\vec{B})$

⑤ $\vec{A}\cdot\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

H.W

let $\vec{A}=5\vec{i}+2\vec{j}$ and $\vec{B}=2\vec{i}-3\vec{j}$

① Find $\vec{A}\cdot\vec{B}$ ② Find the angle between two vectors?

H.W if $P_1=(1,2)$, $P_2=(-2,4)$, $Q_1=(6,4)$, $Q_2=(12,1)$

① Find the vectors $\overrightarrow{P_1P_2}$ and $\overrightarrow{Q_1Q_2}$

② // $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ and $|\overrightarrow{Q_1Q_2}|$

③ // the angle between $\overrightarrow{P_1P_2}$ and $\overrightarrow{Q_1Q_2}$?

تمارين

(13)

① if i, j and k are unit vectors, write the vector from the origin to the points $P=(4,5,1)$, $Q=(0,-1,1)$, $R=(3,-2,4)$ and $T=(-4,3,5)$ and make a sketch ?

② The three Points $A=(1,2,3)$, $B=(-2,1,-4)$ and $C=(3,4,-2)$ ~~make a sketch of the vectors~~ Determine the vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ and $\overrightarrow{CA}$?

③ if $\vec{A}=5\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{B}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$ and $\vec{C}=-\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ then

(a) make a sketch of the vectors $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ and $\overrightarrow{OC}$

(b) Determine the vectors $\vec{A}+\vec{B}$, $3\vec{A}-2\vec{B}+\vec{C}$ and $2\vec{A}+\vec{B}-4\vec{C}$

(c) Find $|\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}|$.

④ The Coordinates of the three ~~vectors~~ points A, B and C are respectively $(1,8,4)$, $(2,-3,1)$ and $(0,-11,4)$ find the vectors $\vec{A}$ and $\overrightarrow{BC}$; and find $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ and $|\overrightarrow{CA}|$

⑤ In question four above; find a unit vectors in the direction of $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ and $\overrightarrow{BC}$

⑥ Find the length of each of the following vectors

(a) $i+j$ (b) $\sqrt{3}\,i-j$ (c) $-3i$ (d) $-5i+5\sqrt{3}\,j$ (e) $-i-j$

⑦ If $\vec{A}=2i+3j$, $\vec{B}=-3j$ and $\vec{C}=4i-j$ Find

(a) $3\vec{A}+2\vec{B}-\vec{C}$ (b) $\vec{A}+2\vec{B}+3\vec{C}$ (c) $|\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}|$

⑧ Let $\vec{A}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ and $\vec{B}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$ Determine a unit vector in the direction of $\overrightarrow{BA}$?

* الحل / المسافة بين متجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$ ∴

$$d=|\vec{A}-\vec{B}|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$

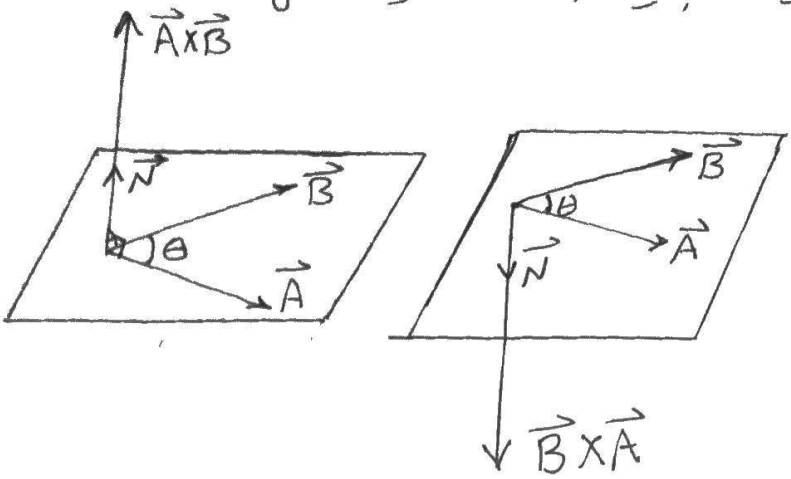
The Cross Product (outer Product) of vectors

* الضرب الخارجي للمتجهات "الضرب الاتجاهي"

* الضرب الخارجي لمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يرمز له بالرمز $\vec{A}\times\vec{B}$ ونتيجة الضرب الخارجي متجه أيضاً يعرف بالعلاقة التالية :-

$$\vec{A}\times\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\,\vec{N}$$

حيث أن $\vec{N}$ هو متجه وحده (unit vector) عمودي على المستوي الذي يحوي المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$. وأن θ تمثل الزاوية بين المتجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$ كما في الشكل :-



* الضرب الخارجي cross (outer) للمتجهين ينتج متجه بينما الضرب الداخلي dot (inner) لمتجهين يعطي عدد (scalar).

* في الفضاء (space) فان :

$$\vec{i}\times\vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}|\sin 0\,\vec{N} = (1)(1)(0)\vec{N} = \vec{0}$$

بنفس الطريقة

$$\vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$$

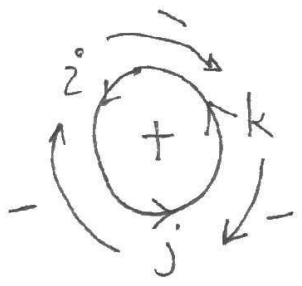
* In The space

① $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$

② $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$; $(\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k})$

$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$; $(\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i})$

$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$; $(\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j})$



③ $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$, where $|\vec{N}| = 1$; since $\vec{N}$ is a unit vector

④ For any two non-zero vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$:

$\vec{A}\times\vec{B} = 0$ if and only if $\vec{A} \parallel \vec{B}$

(إذا وفقط إذا)

(13) برهان: $\vec{A}\times\vec{B}=0$ if and only if $\vec{A}\parallel\vec{B}$ ؟

∵ $\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\,\vec{N}$

if $\vec{A}\times\vec{B}=0 \Rightarrow |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\,\vec{N}=0 \Rightarrow \sin\theta=0 \Rightarrow \theta=0$ or π

وهذا يعني $\Rightarrow \vec{A}\parallel\vec{B}$

(5) $\vec{A}\times\vec{A}=0$

(6) $\vec{A}\times\vec{B}=-(\vec{B}\times\vec{A})$ ← عكس الضرب الداخلي

علاقة الضرب الخارجي X هي غير متبادلة بين المتجهات

(7) $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

(8) $r(\vec{A}\times\vec{B})=(r\vec{A})\times\vec{B}=\vec{A}\times(r\vec{B})$

(9) $(\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}$

(9) برهان $\Rightarrow (\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C}=-\vec{C}\times(\vec{A}+\vec{B})=(-\vec{C})\times\vec{A}+(-\vec{C})\times\vec{B}$

$=-(\vec{C}\times\vec{A})-(\vec{C}\times\vec{B})$

$=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}$

(10) let $\vec{A}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ and $\vec{B}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$; then

لتكن — عندئذٍ

$\vec{A}\times\vec{B}=(a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}$ برهان ذلك؟

(11) أن التعبير الأخير $\vec{A}\times\vec{B}$ يمكن أن يوضح بالصيغة التالية :-

(11)

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

هذه الصيغة | | حتى محدد من الرتبة الثالثة

أن العلاقة أعلاه هي علاقة مهمة جداً (تحفظ) وسنأتي لموضوع المحددات بالتفصيل لاحقاً.

لمعرفة كيف نضع $\vec{A}\times\vec{B}$ بصيغة المحددات نعمل ما يلي :-

∵ $\vec{A}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$

∵ $\vec{B}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

$$\Rightarrow \text{اذن}\quad \vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

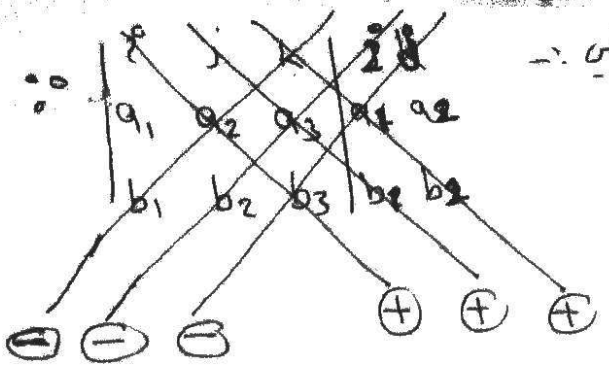
① نضع $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ كما في الشكل

② نضع مركبات المتجه $\vec{A}$ في الصف الثاني من المحدد

③ " " " $\vec{B}$ في الصف الثالث من المحدد

الآن لإيجاد قيمة $\vec{A}X\vec{B}$ فإننا نقوم بفتح المحدد كما يلي :-

① نكتب المحدد
② نضيف عمودين أول $\hat{i}$ و $\hat{j}$ كما في الشكل



$$\therefore \vec{A}X\vec{B} = \hat{i}(a_2b_3) + \hat{j}(a_3b_1) + k(a_1b_2) - k(a_2b_1) - \hat{i}(a_3b_2) - \hat{j}(a_1b_3)$$

$$\vec{A}X\vec{B} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

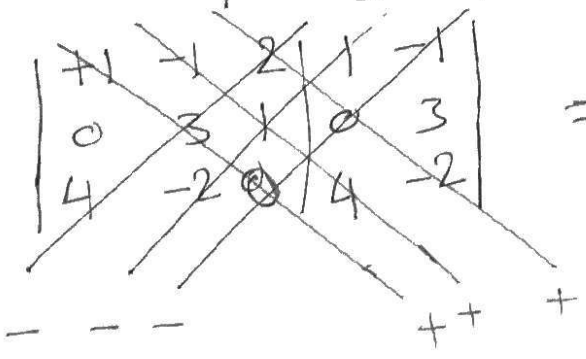
* فتح المحدد من المرتبة الثالثة "The expansion of determinant of order 3"

لفتح محدد من المرتبة الثالثة (أي إيجاد محدد من المرتبة الثالثة) نستخدم المثال التالي :-

Example :
$$\begin{vmatrix} +1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

} جد قيمة المحدد

الحل



$$\Rightarrow (1)(3)(0) + (-1)(1)(4) + (2)(0)(-2) - (2)(3)(4) - (1)(1)(-2) - (-1)(0)(0)$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 + 0 - 24 + 2 + 0 = -26$$

Example : let $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\vec{k}$ and $\vec{B} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 5\vec{k}$

Find $\vec{A}X\vec{B}$ ؟

الحل
Solution :
$$\vec{A}X\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{matrix}$$

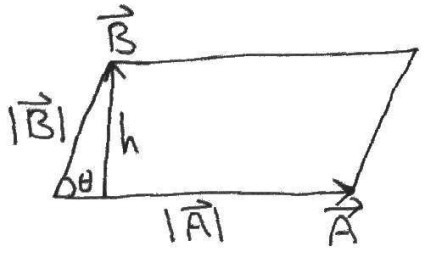
$$\therefore \vec{A}X\vec{B} = -\hat{i} - 30\hat{j} - 23\vec{k}$$

"Area of a parallelogram" متوازي أضلاع

مساحة متوازي الأضلاع

ليكن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ متجهان غير متوازيان يشكلان جانبي متوازي أضلاع كما في الشكل. عندئذٍ فان مساحة متوازي الأضلاع تعطى بالعلاقة التالية :-

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$$



المساحة Area $= |\vec{A}|\,h$ (مساحة القاعدة × الارتفاع)

$\because \sin\theta = \frac{h}{|\vec{B}|}$ المقابل / الوتر $\Rightarrow$ أذن $h = |\vec{B}|\sin\theta$

$\therefore$ Area $= |\vec{A}|h = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta = |\vec{A}\times\vec{B}|$

Example:

Find the area of parallelogram with vectors $\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ and $\vec{B} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ as non parallel sides ? جوانب غير متوازية

Sol.

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{(2)(3)+(-1)(0)+(2)(4)}{(3)(5)} = \frac{14}{15}$$

$\because \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta \Rightarrow \sin^2\theta = 1-\left(\frac{14}{15}\right)^2 = \frac{29}{225}$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{29}}{15} \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

$\therefore$ Area $= |\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta = (3)(5)\frac{\sqrt{29}}{15} = \sqrt{29}$

حل آخر

Sol : $\because$ Area $= |\vec{A}\times\vec{B}|$

$$\therefore |\vec{A}\times\vec{B}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{matrix}$$

$$\therefore |\vec{A}\times\vec{B}| = |-4\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k} - (-3\vec{k}) + 0\vec{i} - 8\vec{j}| = |-4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}|$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$$

تمرين / هل نتيجة الضرب الداخلي (الضربي / النقطي) لمتجهين يمثل متجه ؟

تمرين / هل تستطيع استخدام الضرب الداخلي على ثلاثة متجهات ؟ وضح إجابتك ؟

Exercise

① Determine the value of $\vec{A}\times\vec{B}$ and $\vec{B}\times\vec{A}$ for each of the following:

(a) $\vec{A}=2\vec{i}+3\vec{k}\ ;\ \vec{B}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

(b) $\vec{A}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}\ ;\ \vec{B}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$

(c) $\vec{A}=\vec{i}-\vec{j}\ ;\ \vec{B}=3\vec{i}-2\vec{j}$

(d) $\vec{A}=\vec{i}\ ;\ \vec{B}=\vec{j}$

(e) $\vec{A}=\vec{i}\ ,\ \vec{B}=\vec{k}$

② Find the areas of the parallelogram formed by the vectors in question ① as adjacent sides (in two ways).

③ Find a vector of unit length which orthogonal both $\vec{i}+2\vec{j}$ and $\vec{j}-3\vec{k}$

④ ~~show that~~ $|\vec{A}\times\vec{B}|^2=|\vec{A}|^2\cdot|\vec{B}|^2-|\vec{A}\cdot\vec{B}|^2$ ~~ج~~

⑤ Using ~~inquality in question ④~~ ; ~~show that~~ $|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$ ~~where θ is the angle between $\vec{A}$ and $\vec{B}$~~

⑥ Show that $|\vec{A}-\vec{B}|^2=|A|^2+|\vec{B}|^2-2|\vec{A}\times\vec{B}|\cot\theta\ ;\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Exercise

① for each of the following vectors determine $\vec{A}\cdot\vec{B}$:

(a) $\vec{A}=2i-6j+5k\ ;\ \vec{B}=i-8j+k$

(b) $\vec{A}=4i+3j-5k\ ;\ \vec{B}=4i+3j-8k$

(c) $\vec{A}=i+j\ ,\ \vec{B}=4i+3j-8k$

(d) $\vec{A}=3i-j+5k\ ;\ \vec{B}=4i+3j-8k$

(e) $\vec{A}=i-5j+k\ ;\ \vec{B}=3i-3k$

② In question ① above. determine which vectors are perpendicular (orthogonal) متعامدان

③ In question above. determine the angle θ between the vectors

④ for any vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ in n-space show that

$|\vec{A}-\vec{B}|^2=|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2-2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$

θ هي الزاوية بين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

(5) If $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are two orthogonal vectors in n-space; show that $|\vec{A}+\vec{B}|^2=|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2$

(6) if $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are two orthogonal vectors in n-space, and r is any scalar; show that $\vec{A}$ is orthogonal to $r\vec{B}$; and $r\vec{A}$ is orthogonal to $\vec{B}$.

(7) For any vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ in n-space, prove that the following relations:

(a) $|\vec{A}+\vec{B}|^2+|\vec{A}-\vec{B}|^2=2|\vec{A}|^2+2|\vec{B}|^2$

(b) $|\vec{A}+\vec{B}|^2-|\vec{A}-\vec{B}|^2=4\vec{A}\cdot\vec{B}$

(8) if $\vec{A}$ is a vector in n-space, show that (a) $|\vec{A}|=|-\vec{A}|$

(b) $|r\vec{A}|=r|\vec{A}|$

(9) for what values of m will the following be unit vector?

(a) $\vec{A}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i}+\frac{\sqrt{3}}{3}\hat{j}+m\hat{k}$, (b) $\vec{B}=m\vec{k}$

(c) $\vec{C}=\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}+m\hat{k}$; (d) $\vec{D}=\hat{i}+m\hat{k}$ (e) $\vec{E}=\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{3}{4}\vec{j}+m\vec{k}$

$\text{Proj}_A B=\left(\vec{B}\cdot\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|^2}\right)\vec{A}$ هو $\vec{A}$ على $\vec{B}$ إسقاط

الأعداد العقدية "complex numbers"

العدد العقدي z يعرّف بدلالة عددين حقيقيين x و y :

$$z = x + iy$$

حيث x الجزء الحقيقي للعدد العقدي z

حيث y الجزء الخيالي " " z

i تسمى الكمية الخيالية (الوحدة الخيالية) بحيث أن $i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$

لتكن $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$

عندئذ

(a) $z_1 = z_2$ if $x_1 = x_2$ and $y_1 = y_2$ (المساواة)

(b) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ (الجمع)

(c) $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ (الضرب)

* كل عدد حقيقي هو عدد عقدي :

$x \Rightarrow$ عدد حقيقي

$x = x + 0i$ (يصبح عدد عقدي)

Examples

(1) $z_1 = 1 + 2i$ ، $z_2 = 2 + 3i \Rightarrow z_1 + z_2 = (1+2) + (2+3)i = 3 + 5i$

(2) $z_1 = -2 + i$ ، $z_2 = 2 + 3i \Rightarrow z_1 + z_2 = 4i$ and $z_1 z_2 = -7 - 4i$

(3) $z_1 = i$ ، $z_2 = -i \Rightarrow z_1 + z_2 = 0$ and $z_1 z_2 = 1$

* إذا z_1 ، z_2 و z_3 أعداد عقدية فإن

(1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ قانون التبادل (commutative law)

(2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ قانون التجميع (associative law)

(3) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ قانون التوزيع (distribution law)

(4) $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$
$z_1 \cdot 1 = 1 \cdot z_1 = z_1$
} identity element

هذه هي العناصر المحايدة حيث ان
$0 = 0 + i0$
$1 = 1 + i0$

"Conjugate of complex number" مرافق العدد العقدي

ليكن $z = x + 2^{i}y$ هو عدد عقدي، فإن العدد المرافق له يرمز له بالرمز $\bar{z}$ (يقرأ بار) ويعطى بالعلاقة $\bar{z} = x - 2^{i}y$ (أحياناً يرمز له بالرمز z^* بدلاً من $\bar{z}$ ويقرأ سيتار).

ملاحظة: دائماً المرافق العقدي يتغير بتبديل 2^{i} ⟵ 2^{-i} وبالعكس

Examples:

① $z_1 = 4 + 5\,2^{i} \Rightarrow \bar{z}_1 = 4 - 5\,2^{i}$

② $z_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\,2^{i} \Rightarrow \bar{z}_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\,2^{i}$

③ $z_3 = -2^{i} \Rightarrow \bar{z}_3 = 2^{i}$

④ $z_4 = 5 \Rightarrow \bar{z}_4 = 5$

*If $z = x + 2^{i}y$ is a complex number then $z\bar{z} = x^2 + y^2$

Examples:

① $z = 3 - 2^{i} \Rightarrow z\bar{z} = 10$

② $z = -2^{i} \Rightarrow z\bar{z} = 1$

خواص الأعداد العقدية

ليكن z_1, z_2 عددين عقديين عندئذٍ

① $\overline{\bar{z}_1} = z_1$

② $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

③ $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

④ $\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$; $z_2 \neq 0$

* إذا كان $z = x + 2^{i}y$ عدد عقدي فإن القيمة المطلقة لـ z يرمز لها بالرمز $|z|$ وتعطى بالعلاقة التالية

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad |z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z} \quad ; \quad |z|^2 = z\bar{z}$$

خواص المعيار المطلقة

ليكن z_1, z_2 عددين عقديين فان

① $|\bar{z}| = |z|$

② $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

③ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

④ $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

مثال:- اكتب بالصيغة $x+iy$ العدد العقدي $\frac{1+2i}{2^\circ} + \frac{2^\circ}{1+2^\circ}$ ؟

الحل

$$\frac{1+2^\circ}{2^\circ} + \frac{2^\circ}{1+2^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{1+2^\circ}{2^\circ}\cdot\frac{-2^\circ}{-2^\circ} + \frac{2^\circ}{1+2^\circ}\cdot\frac{1-2^\circ}{1-2^\circ} = \frac{1-2^\circ}{1} + \frac{1+2^\circ}{2} = (1-2^\circ) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}2^\circ\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}2^\circ\right) \quad \text{و.م.ر}$$

Exercise: write in the form $x+iy$ each of the following ?

$$(1+2^\circ)^2,\ \frac{3+4i}{1-2i^\circ},\ \frac{2+2^\circ}{1+2^\circ},\ \frac{1+2^\circ}{2^\circ},\ \frac{2^\circ}{1+2^\circ},\ \frac{2}{3-2^\circ},\ \frac{1-2^\circ}{2^\circ} + \frac{2^\circ}{1-2^\circ}$$

47

Exercises:

① Find the equation in the parametric form, and in the symmetric form if possible for lines which pass respectively through the following pair of points in each case ?

(a) $(2,-3,4)$ and $(5,2,-1)$ (b) $(3,5,7)$ and $(4,-2,9)$

(c) $(2,3,3)$ and $(2,-3,-3)$ (d) $(2,-1,3)$ and $(6,7,4)$

(e) $(1,0,3)$ and $(3,0,4)$

② Find the equations in the parametric form and symmetric form for the line which passes through the point (a,b,c) and parallel to $\vec{A} = m\vec{i} + h\vec{j} + t\vec{k}$

③ Find the equations in the parametric and Symmetric forms for the line passing through the origin and parallel to $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 9\vec{k}$

④ compute $\overline{5-2i}$, $(1+i)+(3-2i)$, $(1+i)(3-2i)$

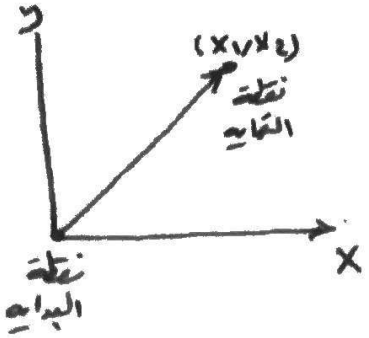
⑤ verify $(Z_1 Z_2)Z_3 = Z_1(Z_2 Z_3)$, with $Z_1 = 1+3i$, $Z_2 = 2+2i$ and $Z_3 = 3+i$

المتجهات في الفضاء R^n

يتمثل المتجه بواسطة تحديد الطول والاتجاه ويمثل بواسطة خط مستقيم

المتجهات في المستوى

* المتجه في المستوى يتمثل بواسطة خط مستقيم نقطة بدايته نقطة الأصل ونقطة نهايته النقطة (x_1, x_2) كما موضح بالشكل



ويمثل المتجه بواسطة نفس الزوج المرتب المستخدم بتمثيل نقطة النهاية

$$\vec{X} = (x_1, x_2)$$

والاحداثيات x_1, x_2 تسمى مركبات المتجه $\vec{X}$

* المتجهان في المستوى $\vec{U} = (u_1, u_2)$ و $\vec{V} = (v_1, v_2)$ متساويان اذا كان

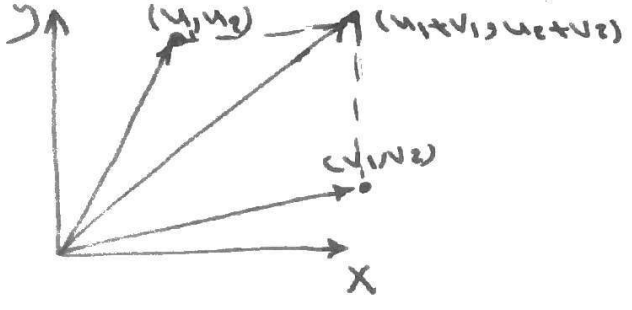
$$u_1 = v_1 \text{ و } u_2 = v_2$$

* لجمع متجهين في المستوى نجمع المركبات المقابلة للمتجهين مثلاً اذا كان:

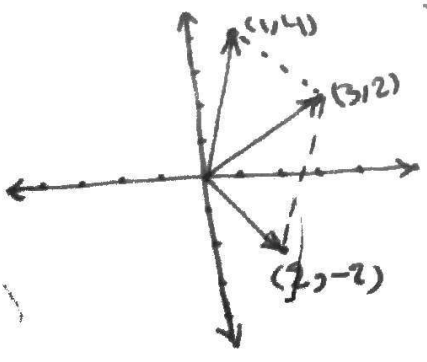
$$U = (u_1, u_2) \text{ و } V = (v_1, v_2)$$

$$U + V = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

وكما موضح بالشكل فانه هندسياً يكون:



مثال:- جد ناتج جمع المتجهين $\vec{U} = (1, 4)$ و $\vec{V} = (2, -2)$



$$\vec{U} + \vec{V} = (3, 2)$$

إذا كان لدينا متجهان $\vec{u}=(3,4)$ و $\vec{v}=(-2,5)$ أوجد ما يلي ؟

(a) أوجد $\frac{1}{2}v$

الحل :- بما أن $v=(-2,5)$ إذن :- $\frac{1}{2}v=\left(\frac{1}{2}(-2,5)\right)=\left(\frac{-2}{2},\frac{5}{2}\right)=\left(-1,\frac{5}{2}\right)$

(b) أوجد $u-v$

الحل :- $u-v=(3,4)-(-2,5)=(3-(-2),4-5)=(5,-1)$

المتجهات في الفضاء النوني R^n

المتجهات في الفضاء النوني R^n تمثل بواسطة n من الأعداد المرتبة مثلاً :-

الزوج المرتب يأخذ الشكل (x_1,x_2)

الثلاثي المرتب " " (x_1,x_2,x_3)

الرباعي المرتب " " (x_1,x_2,x_3,x_4)

n المرتب من الأعداد يأخذ الشكل $(x_1,x_2,x_3,x_4,\dots,x_n)$

ومجموعة كل n المرتب من الأعداد في الفضاء النوني يرمز له بالرمز R^n

حيث أن :-

R^1 = فضاء واحد = مجموعة كل الأعداد الحقيقية

R^2 = فضائين = مجموعة كل الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية

R^3 = ٣ فضاء = " " الثلاثي المرتب " "

R^4 = ٤ فضاء = " " الرباعي " " "

R^n = n فضاء = " " n المرتب من الأعداد الحقيقية

كذلك فإن القوس ( ) الذي يحتوي على الأعداد المرتبة يمثل أما نقطة أو متجه وهذا يعني أن $(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ يمكن أن يمثل نقطة أو متجه في الفضاء النوني R^n وتكون $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ هي الإحداثيات للنقطة أو مركبات للمتجه X في الفضاء n وهذا ترميز جديد للمتجهات بالإضافة الى الترميز السابق للمتجهات بواسطة نوذر k

ملاحظة :- أي من الترميزين السابقين للمتجهات هو صحيح وأيهما يستخدم مقبول !!!

ل: إذا كان u و v متجهات في الفضاء الشعاعي R^n وليكن c عدد حقيقي
جد $u+v$ و cu حيث أن:-

$u=(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$
$v=(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$

الحل ⟹ $u+v=(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3, \dots, u_n+v_n)$
$cu=(cu_1, cu_2, cu_3, \dots, cu_n)$

مثال: اذا كان $u=(-1,0,1)$ و $v=(2,-1,5)$ متجهات في R^3 أوجد مايلي
$u+v$ و $v-2u$

الحل $u+v=(-1,0,1)+(2,-1,5)=(1,-1,6) \Leftrightarrow \vec{i}-\vec{j}+6\vec{k}$
$v-2u=(2,-1,5)-(-2,0,2)=(4,-1,3) \Leftrightarrow 4\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$

مثال: لتكن u و v و w متجهات في R^4 حيث:
$u=(2,-1,5,0)$
$v=(4,3,1,-1)$
$w=(-6,2,0,3)$

أوجد x حيث أن $3(x+w)=2u-v+x$

الحل ⟹ $3(x+w)=2u-v+x$
$3x+3w=2u-v+x$
$3x-x=2u-v-3w$
$2x=2u-v-3w$
$x=\frac{1}{2}(2u-v-3w)$
$x=\frac{1}{2}(2(2,-1,5,0)-(4,3,1,-1)-3(-6,2,0,3))$
$x=\frac{1}{2}((4,-2,10,0)-(4,3,1,-1)-(-18,6,0,9))$
$x=\frac{1}{2}(18,-11,9,-8)$
$x=(9,-\frac{11}{2},\frac{9}{2},-4) \Leftrightarrow 9\vec{i}-\frac{11}{2}\vec{j}+\frac{9}{2}\vec{k}-4\vec{l}$

④ ① اذا كان لدينا متجهان $\vec{u}=(1,-1,0,1)$ و $\vec{v}=(-1,3,2,0)$

أوجد $\vec{w}$ ما يلي

② $w+u=-v$ ① $2w=u-3v$

⑤ $w+3v=-2u$ ④ $\frac{1}{2}w=2u+3v$

② اكتب المتجه v كتركيب خطي من المتجهات u_1,u_2,u_3,u_4 و u_5 ثم أوجد الكل ؟

حيث أن :-

$u_1=(1,2,-3,4,-1)$ و $u_4=(2,1,-1,2,1)$

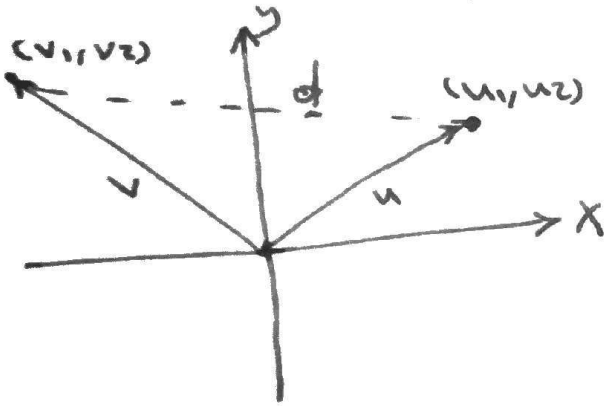
$u_2=(1,2,0,2,1)$ و $u_5=(0,2,2,-1,-1)$

$u_3=(0,1,1,1,-4)$ و $v=(5,3,-11,11,9)$

③ أوجد متجه وحده باتجاه المتجه $v=(3,-1,2)$ واثبت أن طوله $=1$

مثال :- اذا كان لدينا متجهين $u=(u_1,u_2)$ و $v=(v_1,v_2)$ فالمسافة بين المتجهين

تعطى بالعلاقة التالية $d=|\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2}$



أسئلة متنوعة «الجزء الثاني» «الفصل الاول»

س١/ اذا كان المتجه $\vec{A}$ له مية 4 فما هو المتجه الذي مية 8 وبنفس اتجاه المتجه $\vec{A}$ وما هو المتجه الذي طوله 2 وباتجاه المعاكس للمتجه $\vec{A}$ وما هو المتجه الوحدة الموازي للمتجه $\vec{A}$ ؟

س٢/ ليكن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ متجهات غير متوازية اثبت بان $\vec{A}+\vec{B}$ و $\vec{A}-\vec{B}$ متعامدان على بعضهما الا اذا وفقط اذا كان $|\vec{A}|=|\vec{B}|$ ؟

ملاحظة/ استخدم $\vec{A}$ و $\vec{B}$ جوانب متوازي اضلاع غير متوازية أو استخدم الضرب القياسي

س٣/ ما هو المتجه الذي طوله 14 وباتجاه المتجه $2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}$ ؟

$\vec{A}\cdot\hat{i}=2=\sqrt{49}\cos\theta \Rightarrow \theta=\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{49}} \Rightarrow \vec{B}=|B|(\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j})$ [الحل]

س٤/ اذا كانت α و β و γ هي الزوايا التي يصنعها المتجه $\vec{A}$ مع المحاور x و y و z على التوالي اثبت بان $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

س٥/ ليكن U و V متجهات وحدة بينهما زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ وليكن $W=3U+5V$ أوجد $|W|$ ؟

س٦/ في الحالات التالية ؛ اوجد متجه وحدة باتجاه المتجه المعطى وهل المتجه الناتج اطول ام اقصر من المتجه المعطى

(a) $[3,-5,6]$ (b) $[4,1,0,-2]$ (c) $[0,6,-0.8]$ (d) $[\frac{1}{5},-\frac{2}{5},-\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{2}{5}]$

س٧/ أي من أزواج المتجهات التالية هي متوازية ؟

(a) $[12,-16]$ و $[9,-12]$ (b) $[4,-14]$ و $[-2,7]$ (c) $[-2,3,1]$, $[6,-4,-3]$

(d) $[10,-8,3,0,27]$ و $[\frac{5}{6},-\frac{2}{3},\frac{3}{4},0,-\frac{5}{2}]$

س٨/ اوجد الزاوية بين المتجهين $[2,-5]$ و $[-10,-4]$

س٩/ اذا كان $\vec{A}=[4,0,-3]$ و $\vec{B}=[3,1,-7]$ اوجد مسقط المتجه $\vec{B}$ على $\vec{A}$ ؟

$P_{\vec{A}}\vec{B}=\left(\vec{B}\cdot\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|^2}\right)\vec{A}$

المتجهات

① المتجه هو مجموعة أعداد الكمية المرتبة (محددة)

② المتجه الصفي يرمز له بالرمز $[x_1\ x_2\ x_3 \cdots x_n]$ متجه صفي ويكتب بصيغة (row vector)

مجموعة محددة مرتبة هذا الأعداد بشكل أفقي

③ المتجه العمودي هو:- $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ (Column vector)

هو مجموعة (لستة) محددة مرتبة من الأعداد الكمية تكتب بصورة عمودية

④ كل عدد هذا هذه الأعداد x_i المكون للمتجه يسمى مركبة المتجه.

المتجه $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow x^t = [x_1\ x_2 \cdots x_n]$ المدور

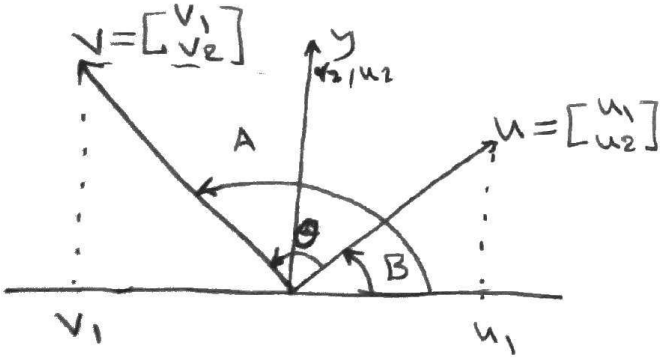
$W = [w_1\ w_2 \cdots w_n] \Rightarrow W^t = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$

متجه صفي — متجه عمودي

* if $V = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ Then $|V| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{V \cdot V} = \sqrt{13}$

if $W = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ then $|W| = \sqrt{1^2+(-2)^2+3^2} = \sqrt{W \cdot W} = \sqrt{14}$

*



$\cos\theta = \cos(A-B)$
$= \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$\cos\theta = \frac{V_1}{|V|}\frac{U_1}{|U|} + \frac{V_2}{|V|}\frac{U_2}{|U|}$

$\cos\theta = \frac{U_1V_1 + U_2V_2}{|U||V|} = \frac{U \cdot V}{|U||V|}$

$\therefore \boxed{\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}||\vec{V}|\cos\theta}$

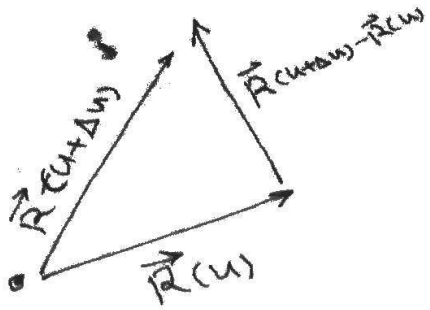
$\cos\theta = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{|\vec{U}||\vec{V}|}$

س/ أثبت أن

① الضرب القياسي على متجهات هو مجموعة حاصل ضرب المركبات المتناظرة

② هو ضرب متجه في متجه

③ يكون



أ تفاضل المتجه "Vector Differentition"

* مشتقة المتجه العادية :

إذا كان $\vec{R}(u)$ متجه يعتمد على متغير واحد مثل u فإن :-

المشتقة $\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta u} = \frac{\vec{R}(u+\Delta u)-\vec{R}(u)}{\Delta u}$

حيث Δu مقدار الزيادة في u . أو يمكن أن تعطى بالعلاقة :-

$$\frac{d\vec{R}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{R}(u+\Delta u)-\vec{R}(u)}{\Delta u}$$

(شرط أن تكون موجودة (طائية))

* المنحنى في الفضاء

أن المتجه الذي بدايته نقطة الأصل وإحداثيات نهايته في الفضاء النقطة (x,y,z) يكتب :

$$\vec{r}(u) = x(u)\,\vec{i} + y(u)\,\vec{j} + z(u)\,\vec{k}$$

إذن مشتقة $\vec{r}$ بالنسبة u هي :-

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta u} = \frac{\vec{r}(u+\Delta u)-\vec{r}(u)}{\Delta u} \quad *$$

حيث أن $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta u}$ متجه بنفس اتجاه المتجه $\Delta \vec{r}$

إذا وضعنا $u=t$ وبما أن $\frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{dt}$ فإن

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k} \qquad (\text{السرعة} = \text{مشتقة الإزاحة})$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\vec{k} \qquad (\text{التسارع} = \text{التعجيل} / \text{مشتقة السرعة})$$

* قوانين الاشتقاق (تحفظ)

1. $\frac{d}{du}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du}$
2. $\frac{d}{du}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B}$
3. $\frac{d}{du}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B}$
4. $\frac{d}{du}(\phi\vec{A}) = \phi\frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\phi}{du}\vec{A}$