مثال 5: – إذا كانت $(M_{(2\times2)}(R),+,*)$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من نوع 2×2 التي عناصرها اعداد حقيقية فأن $M_{(2\times2)}$ مع الجمع والضرب المصفوفات0

Sol: -

حلقة ذات عنصر محايد وليست تبديلية

مثال 6: – إذا كان $(Q(\sqrt{p}),+,*)$ و p عدد اولي، حيث

$Q(\sqrt{p})=\{a+b\sqrt{p}\ ,\ a, b\in Q\}$

Sol: -

$(Q(\sqrt{p}),+)$ زمرة تبديلية

$(Q(\sqrt{p}),*)$ شبه زمرة

$$\because\ Q(\sqrt{p})\times Q(\sqrt{p})\to Q(\sqrt{p})$$
$$(a+b\sqrt{p})\cdot(c+d\sqrt{p})$$
$$=ac+ad\sqrt{p}+cb\sqrt{p}+bdp$$
$$=(ac+bdp)+(ad+cb)\sqrt{p}$$

$\therefore (Q(\sqrt{p}),+,*)$ حلقة ذات عنصر محايد و تبديلية

ملاحظة: – التعبير الاتي $a+(-b)$ يكتب $a-b$

بعض خواص الحلقة

مبرهنة 1: - إذا كانت $(R,+,*)$ حلقة فأن

$$\forall a \in R, a.0 = 0.a = 0$$

البرهان: -

من قانون التوزيع من اليسار

$$a.0 = a(0.0)$$
$$= a.0 + a.0$$

باستخدام نظير الجمعي للعنصر $(a.0)$

$$a.0 + (-a.0) = a.0 + a.0 + (-a.0)$$
$$\gg 0 = a.0 + 0$$
$$0 = a.0$$

بنفس الطريقة نبرهن $0.\ a=0$

تعريف 7: - الحلقة الصفرية

هي عبارة عن حلقة تمتلك عنصر واحد وهو المحايد الجمعي ويرمز لها احيانا بالرمز 0

مبرهنة 2: - اذا كانت $(R,+,*)$ حلقة غير صفرية فأن العلاقات الاتية صحيحة

1- اذا كانت R لها محايد ضربي وهو 1 فان $1\neq 0$

2- $-(a.b) = (-a).b = a.(-b), \forall a,b \in R$

-3 $(-a).(-b) = a.b, \forall a, b \in R$

-4 $a(b-c) = a.b - a.c, \forall a, b, c \in R$

-5 إذا كانت R لها عنصر محايد ضربي فان

$$(-1).a = a.(-1) = -a, \forall a \in R$$

البرهان

–1

نفرض ***1=0***

$$\because R \neq \{0\}$$

$\therefore$ يوجد عنصر غير الصفر مثل

$$a = a.1 = a.0$$

$$= 0$$

$$\gg a = 0$$

تناقض مع الفرض $a \neq 0$

$$\therefore 1 \neq 0$$

–2

من حقيقة $b + (-b) = 0$

0 محايد جمعي

$$\therefore (a.b) + a.(-b) = a\big(b + (-b)\big)$$

$$= a.0$$

$$= 0$$

هذا يعني (a(-b هو نظير الجمعي a.b ولكن النظير الجمعي (a.b) هو (a.b)−

$$-(a.b) = a.(-b)$$

$$a + (-a) = 0$$

$$a.b + (-a)b = a + (-a)b$$

$$= 0.b$$

$$= 0$$

ملاحظة: – سنكتب عادة R بدلا (*,+,R) وسنكتب ab بدلا من a.b الا ذكر غير ذلك

مبرهنة 3: – لتكن R حلقة إذا وجد عنصر لهذه الحلقة فانهُ وحيد وإذ وجد عنصر من R معكوس فأن وحيد ايضاً