مادة (الحلقات)

الفصل الاول

تم دراسة نظرية الزمر في المرحلة السابقة وهي مجموعات مزودة بعملية ثنائية واحدة ويرمز لهذه العملية بالرمز (.... ، o ، + ، ∗) .

سندرس المجموعات المزودة بعمليتين ثنائيتين مثل ($+ , \cdot$) , (o , ∗) , (∪ , ∩) , ...

بعض المفاهيم الاساسية

(1) تعريف العملية الثنائية :

تعرف العملية الثنائية على مجموعة غير خالية مثل ($S \neq \emptyset$) على انها تطبيق (دالة)

$$\ast : S \times S \rightarrow S$$

ان صور المجال المقابل هي عبارة عن $a \ast b$

ملاحظة// كل تطبيق هو دالة لكن ليس كل دالة هي تطبيق .

حيث ان (S×S) تمثل حاصل الضرب الديكارتي لـ(S) في نفسها اي ان (S×S) هي مجموعة كل الازواج المرتبة

$$S\times S=\{\ \forall(a,b) : a,b \in S\ \}$$

(2) تعريف النظام الرياضي : يعرف على انه مجموعة غير خالية مع عملية ثنائية واحدة او اكثر على تلك المجموعة S مع ∗

ان النظام الرياضي المتكون من مجموعة غير خالية G والعملية الثنائية * على G يرمز له بالرمز (∗ , G) وبالمثل النظام الرياضي المتكون من المجموعة G مع عمليتين ثنائيتين ∗,# ويرمز له بالرمز (G,∗,#) .

(3) تعريف شبه زمرة : يقال عن النظام الرياضي (G , ∗) بأنه شبه زمرة اذا كان (G , ∗) نظاماً تجميعياً اي ان ∗ عملية تجميعية على G

$$a * (b * c) = (a * b) * c \quad , \quad \forall\, a, b, c \in G$$

(4) تعريف الزمرة : يقال عن النظام الرياضي (G , ∗) بأنه زمرة اذا حقق الشروط الاتية :

1/ يجب ان تكون (G , ∗) شبه زمرة .

2/ تحتوي عنصر محايد بالنسبة للعملية * أي أنه يوجد وحيد مثل $e \in G$ بحيث

$$\exists\, e \in G : a * e = e * a = a \,, \forall\, a \in G$$

3/ كل عنصر $a \in G$ له معكوس (نظير) $a^{-1} \in G$ بالنسبة للعملية * أي ان :

$$\forall\, a \in G \,, \exists\, a^{-1} \in G : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

يرمز للنظير بالرمز (a^{-1} أو $\bar{a}$)

(5) تعريف الحلقة :

يقال أو يسمى الثلاثي (R , + , ·) (النظام الرياضي) المكون من مجموعة غير خالية مثل R مع عمليتي الجمع والضرب (· , +) حـلـقـــة (ring) اذا تحقق الشروط التالية:

1/ ان تكون (R , +) زمرة إبداليه أو تبديلية .

2/ ان تكون (R , ·) شبه زمرة .

3/ ان تكون عملية (·) توزيعية على عملية (+) من اليمين واليسار أي ان

من جهة اليسار $\quad a \cdot (b + c) = a \cdot c + a \cdot b \quad , \forall\, a, b, c \in R$

من جهة اليمين $\quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad , \forall\, a, b, c \in R$

تعريف (6): (حلقة ذات عنصر محايد)

يقال عن الحلقة $(R , + , \cdot)$ بأنها حلقة ذات عنصر محايد اذا كانت الشبه زمرة $(R , \cdot)$ تحتوي على عنصر محايد يرمز له بـ(1) أي ان

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \ , \forall \ a \in R$$

تعريف (7): (حلقة إبدالية أو تبديلية)

يقال عن الحلقة $(R , + , \cdot)$ بأنها حلقة إبدالية أو تبديلية اذا كانت الشبه زمرة $(R , \cdot)$ هي شبه زمرة تبديلية أي ان

$$a \cdot b = b \cdot a \ : \ \forall \ a, b \in R$$

ملاحظة(1)/ اذا كان $a \in R$ له نظير (معكوس) بالنسبة الى عملية $(\cdot)$ تسمى نضيراً ضربياً ويرمز له بالرمز (a^{-1} أو $\bar{a}$)

أما النظير الجمعي لـ(a) نرمز له بالرمز (-a) .

ملاحظة(2)/ مجموعة كل العناصر في R التي لها نظيرات ضربيه سنرمز لها بالرمز R^* .

ملاحظة(3)/ ان عملية الضرب والجمع يمثلان عمليتين مجردتين وليس عمليتي الجمع والضرب الاعتيادية.

ترميز :

1) $\mathbb{C}$ مجموعة الاعداد المركبة (a+bi)
2) $R=\mathbb{R}$: مجموعة الاعداد الحقيقية
3) $Q=\mathbb{Q}$: مجموعة الاعداد النسبية
4) $Z=\mathbb{Z}$: مجموعة الاعداد الصحيحة
5) Z_e : مجموعة الاعداد الصحيحة الزوجية
6) Z_o : مجموعة الاعداد الصحيحة الفردية
7) nZ , (n عدد صحيح موجب) : مجموعة مضاعفات العدد n
8) Z_n , (n عدد صحيح موجب) : مجموعة الاعداد الصحيحة مقياس أو معيار (n)

$$Z_n = \{0,1,2,3, \dots , n-1\}$$

مثال (1): $(R , + , \cdot)$ ماذا يمثل هذا النظام ؟

الحل/

توضيح

1/ (+) عملية مغلقة على (R) لأن :

$\forall \ a, b \in R : a + b \in R$

2/ (+) تجميعية على (R) لأن :

$a + (b + c) = (a + b) + c \ , \forall \ a, b, c \in R$

3/ (R) تحتوي على محايد وهو (0) بحيث

$a + 0 = 0 + a = a \ , \forall \ a \in R$

1/ $(R , +)$ هي زمرة تبديلية ⟵

2/ $(R , \cdot)$ هي شبه زمرة لأنها تحقق شرط الانغلاق والتجميعية.

3/ عملية الضرب توزيعية على عملية الجمع في R أي ان : $\boxed{\therefore e = 0}$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \forall\, a, b, c \in R$$

4/ تحتوي $(R , \cdot)$ عنصر محايد وهو (1) بحيث $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \;, \forall\, a \in R$

5/ $(R , \cdot)$ تحقق شرط الأبدالية بحيث $a \cdot b = b \cdot a \;,\; \forall\, a, b \in R$

اذن اصبحت $(R , + , \cdot)$ حلقة من خلال الشروط الثلاث الاولى تم اصبحت حلقة بمحايد مع وجود الشرط الرابع ثم اصبحت حلقة ابدالية بمحايد مع وجود الشرط الخامس.

<u>مثال (2):</u> $(Z_e , + , \cdot)$ ماذا يمثل هذا النظام ؟

الحل/

1/ $(Z_e , +)$ زمرة ابدالية

2/ $(Z_e , \cdot)$ شبه زمرة

3/ عملية الضرب توزيعية على عملية الجمع في Z_e أي ان :

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \forall\, a, b, c \in Z_e$$

4/ نفرض ان $a \in Z_e$ وان العنصر المحايد لــ$(Z_e , \cdot)$ هو (s) أي ان

$$\therefore a \cdot s = a \;\; \Rightarrow s = \frac{a}{a} \;\; \Longrightarrow s = 1$$

لكن $1 \notin Z_e$ اذن $(Z_e , \cdot)$ لا تحتوي على عنصر محايد

5/ $(Z_e , \cdot)$ تحقق شرط الأبدالية بحيث $a \cdot b = b \cdot a \;,\; \forall\, a, b \in Z_e$

اذن $(Z_e , + , \cdot)$ هي حلقة ابدالية لا تحتوي على عنصر محايد (ضربي)

. | 1 2 3 4

1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

مثال (3): $(Z_5 , +_5 , \cdot_5)$ ماذا يمثل هذا النظام ؟ ثم جد Z_5^*

الحل / عناصر Z_5 هيَ $\{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 \}$

1/ $(Z_5 , +_5)$ تمثل زمرة ابدالية

2/ $(Z_5 , \cdot_5)$ تمثل شبه زمرة

3/ $(\cdot_5)$ تتوزع على $(+_5)$ اي ان $\{a \cdot_5 (b +_5 c) = (a \cdot_5 b)+_5(a \cdot_5 c) , \forall\, a, b, c \in Z_5\}$

4/ $(Z_5 , \cdot_5)$ لا تحتوي على عنصر محايد لكل عناصر Z_5 حيث

$1 \cdot_5 1 = 1 \quad , \quad 1 \cdot_5 2 = 2$

$1 \cdot_5 3 = 3 \quad , \quad 1 \cdot_5 4 = 4$

$1 \cdot_5 0 = 0$ لكن

5/ $(Z_5 , \cdot_5)$ تبديلية ويمكن معرفة ذلك من الجدول اعلاه .

اذن $(Z_5 , +_5 , \cdot_5)$ تمثل حلقة تبديلية

Z_5^* هي عباره عن نظيرات العناصر في Z_5 بالنسبة للعملية $(\cdot_5)$

$\therefore Z_5^* = \{ 1 , 2 , 3 , 4 \}$

العناصر	النظير
1	1
2	3
3	2
4	4

H.W/ $(Z_7 , +_7 , \cdot_7)$ ماذا يمثل هذا النظام ؟ ثم جد Z_7^*

H.W/ $(Z_{16} , +_{16} , \cdot_{16})$ ماذا يمثل هذا النظام ؟ ثم جد Z_{16}^*