الاحداثيات الانحنائية

اذا اعطينا التحويل $w = f(z)$ او المكافئ له $v = v(x,y)$ و $u = u(x,y)$ فأننا نسمي (x,y) الاحداثيات المتعامدة بالنسبة الى نقطة ما في المستوي z و (u,v) بالإحداثيات

التحويل الخطي Linear Transformation

يسمى التحويل $w = az + b$ بالتحويل الخطي حيث ان a و b اعداد معقدة و w دالة خطية. هنالك ثلاث انواع من التحويل الخطي يتم فيها تحويل النقاط من المستوي z الى المستوي المعقد w وهي:

١- تحويل النقل (ازاحة بمقدار b) *Transport Transformation*:

إذا كان $a = 1$ و b اختيارية فأن

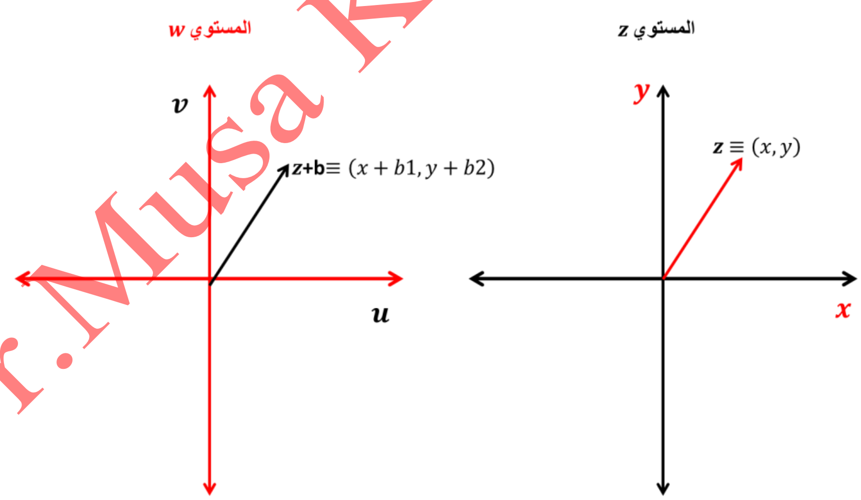
$$w = f(z) = z + b$$

وهنا نلاحظ أن كل نقطة z أزيحت بإضافة العدد b . وبما ان $b = b1 + ib2$ فأن

$$w = u + iv = x + iy + b1 + ib2$$

$$u = x + b1$$
$$v = y + b2$$

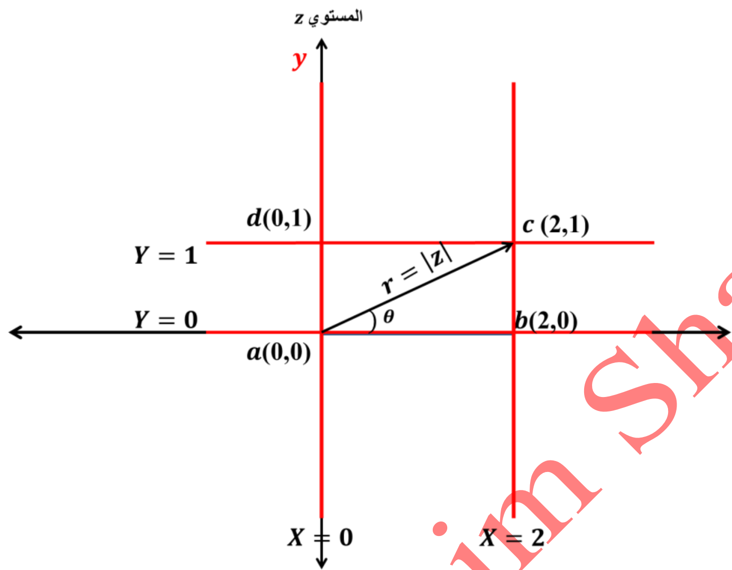
هذا يعني ان النقطة (x,y) في المستوي z هي النقطة $(x + b1, y + b2)$ في المستوي w كما في الشكل ادناه



مثال: افرض ان لدينا المستطيل الذي تكون من تقاطع المستقيمات $X = 0$ و $X = 2$ و $Y = 0$ و $Y = 1$ وكما موضح في الرسم ادناه حيث كل نقطة من نقاط المستطيل تكونت من تقاطع مستقيمين، جد r و θ ومن

ثم باستخدام التحويل الخطي حول المستطيل في المستوي z الى المستوي w، باستخدام تحويل النقل اذا علمت بأن $w = z + 1 - 2i$.

الحل:



العدد العقدي z ممثل بالرسم بالنقطة c بحيث ان

$$z = 2 + i \equiv (2,1)$$

نستخرج قيمة r من خلال التالي:

$$r = |z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

نستخرج قيمة θ بالدرجة من خلال:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2} = 26.5^o$$

لاستخراج النقاط المقابلة في المستوي w نعوض نقاط المستطيل الناتجة من تقاطع كل مستقيمين في المستوي المعقد z في التحويل الخطي ، بالنسبة الى $a(0,0)$

$$w = (0 + i0) + 1 - 2i = 1 - 2i \equiv a'(1,-2)$$

اما بالنسبة الى $b(2,0)$

$$w = (2 + i0) + 1 - 2i = 3 - 2i \equiv b'(3,-2)$$

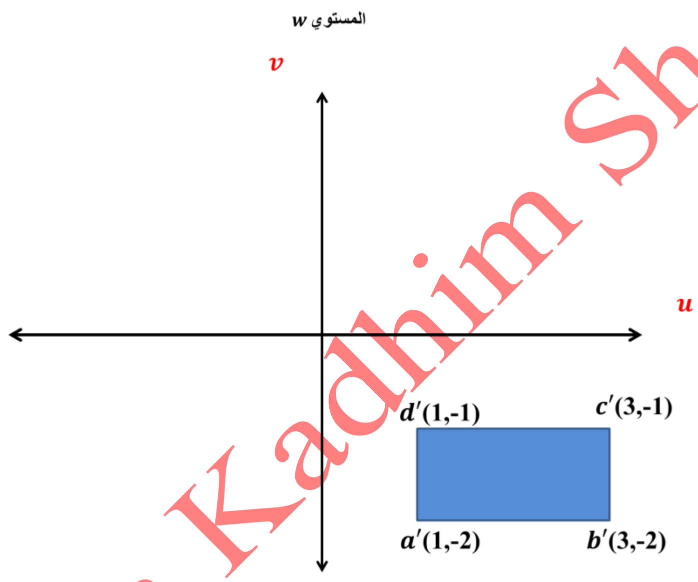
اما بالنسبة الى $c(2,1)$

$$w = (2+i) + 1 - 2i = 3 - i \equiv c'(3,-1)$$

اما بالنسبة الى $d(0,1)$

$$w = (0+i) + 1 - 2i = 1 - i \equiv d(1,-1)$$

لذلك نعين نقاط المستوي w كما في الشكل ادناه:



٢- تحويل التدوير (ازاحة بمقدار$arg\{a\}$) Rotation Transformation:

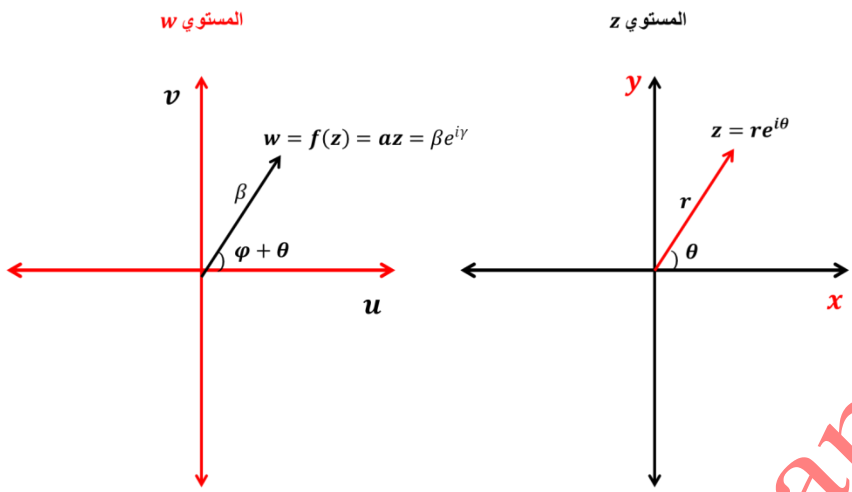
إذا كان $b = 0$ و a اختيارية وهو عدد معقد أي أن

$$w = f(z) = az$$

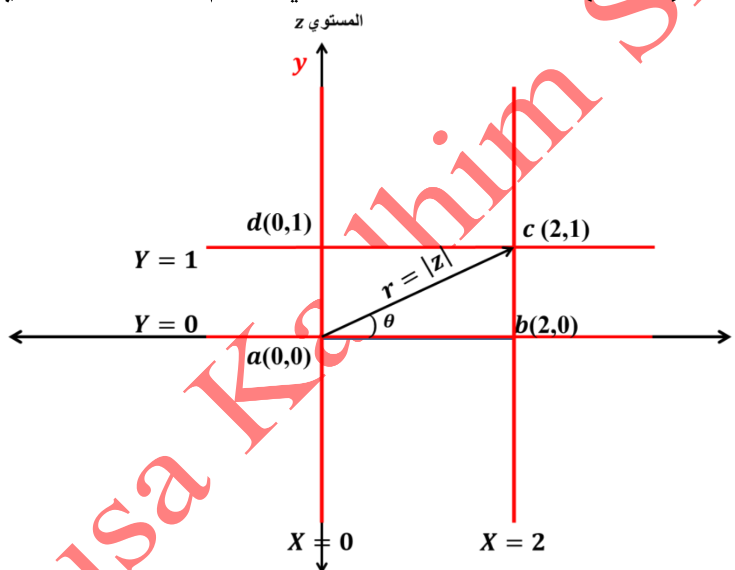
حيث أن $a = \rho e^{i\varphi}$ و $z = re^{i\theta}$ ، وعلية يكون

$$w = f(z) = \rho r e^{i(\varphi+\theta)} = \beta e^{i\gamma}$$

هذا النوع من التحويل يعني تدوير (ازاحة) المتجه z حول نقطة الاصل بزاوية φ حيث $\varphi = arg\{a\}$ مع تصغير او تكبير هذا المتجه بمقدار ρ حيث $\rho = |a|$.



مثال: استعمل التحويل $w = (1 + i)z$ بنقل المستطيل في الرسم ادناه من المستوي z الى المستوي w.



الحل:

$$w = f(z) = \rho r e^{i(\varphi+\theta)} = \beta e^{i\gamma}$$

نجد r و θ :

$$r = \sqrt{5}$$

$$\theta = 26.5^0$$

نستخرج ρ و φ من

$$\rho = |a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{1}{1} = 45^0$$

وبالتالي فأن β والزاوية γ تكون

$$\beta = r\rho = \sqrt{10}$$

$$\gamma = 71.5^0$$

لذا فأن f(z) تكون

$$f(z) = \beta e^{i\gamma} = \sqrt{10}e^{i71.5}$$

لاستخراج النقاط المقابلة في المستوي w نعوض نقاط المستطيل الناتجة من تقاطع كل مستقيمين في المستوي المعقد z في التحويل الخطي ، بالنسبة الى $a(0,0)$

$$w = (1+i)(0+i0) \equiv a'(0,0)$$

اما بالنسبة الى $b(2,0)$

$$w = (1+i)(2+i0) \equiv b'(2,2)$$

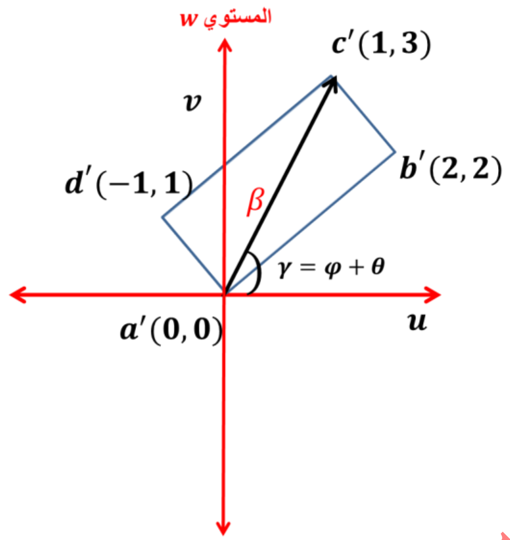
اما بالنسبة الى $c(2,1)$

$$w = (1+i)(2+i) \equiv c'(1,3)$$

اما بالنسبة الى $d(0,1)$

$$w = (1+i)(0+i) \equiv d'(-1,1)$$

لذلك نعين نقاط المستوي w كما في الشكل ادناه:

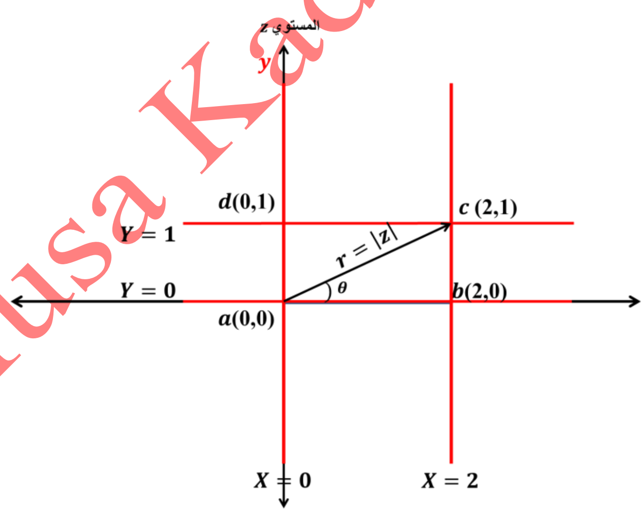


٣- تحويل النقل و التدوير (إزاحة بمقدار b و $(arg\{a\}$

Transport &Rotation Transformation

يجمع التحويل $w = az + b$ بين تحويل النقل و التدوير وكما مبين في المثال التالي:

مثال: أستخدم التحويل $w = (1+i)z + (1-2i)$ لنقل المستطيل الى المستوي w



$$w = f(z) = \rho r e^{i(\varphi+\theta)} = \beta e^{i\gamma}$$

كما في المثال اعلاه نجد r و θ :

$$r = \sqrt{5}$$

$\theta = 26.5^0$

نستخرج ρ و φ من

$\rho = |a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\varphi = \tan^{-1}\frac{1}{1} = 45^0$

وبالتالي فأن β والزاوية γ تكون

$\beta = r\rho = \sqrt{10}$

$\gamma = 71.5^0$

لذا فأن f(z) تكون

$f(z) = \beta e^{i\gamma} = \sqrt{10}e^{i71.5}$

لاستخراج النقاط المقابلة في المستوي w نعوض نقاط المستطيل الناتجة من تقاطع كل مستقيمين في المستوي المعقد z في التحويل الخطي $w = (1+i)z + (1-2i)$ ، بالنسبة الى $a(0,0)$

$w = (1+i)(0+i0) + 1 - 2i = 1 - 2i \equiv a'(1,-2)$

اما بالنسبة الى $b(2,0)$

$w = (1+i)(2+i0) + 1 - 2i = 3 - 2i \equiv b'(3,0)$

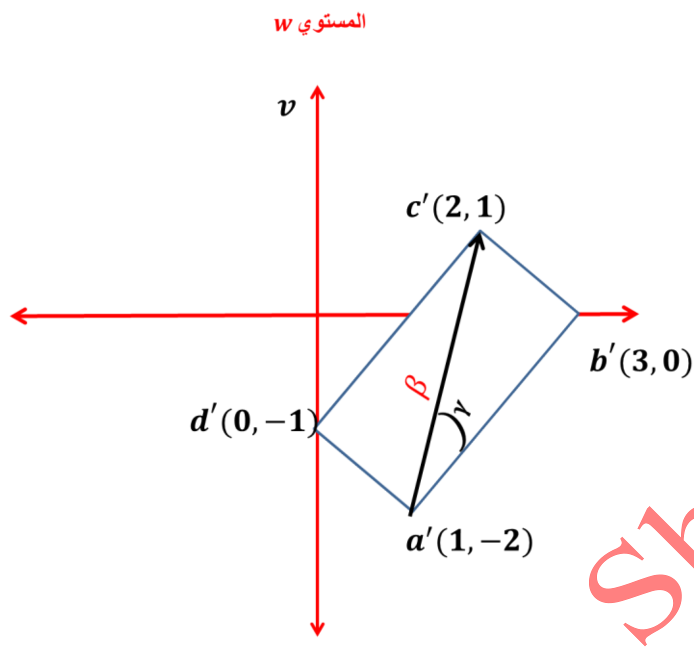
اما بالنسبة الى $c(2,1)$

$w = (1+i)(2+i) + 1 - 2i = 3 - i \equiv c'(2,1)$

اما بالنسبة الى $d(0,1)$

$w = (1+i)(0+i) + 1 - 2i = 1 - i \equiv d'(0,-1)$

لذلك نعين نقاط المستوي w كما في الشكل ادناه:


المستوي w
v
$c'(2,1)$
$b'(3,0)$
$d'(0,-1)$
$a'(1,-2)$
β
γ