الفصل الثاني

الدوال النظامية البسيطة

المتغير ودوال المتغير العقدي

يسمى الرمز z الذي يعبر عن أي عنصر في فئة الاعداد المعقدة بالمتغير المعقد. اذا كان لكل قيمة للمتغير المعقد z توجد قيمة واحدة او عدة قيم للمتغير المعقد w، فيقال ان w هي دالة لـ z وتكتب:

$$w = f(z)$$

يسمى z بالمتغير المعقد المستقل، بينما w بالمتغير المعقد المعتمد. اذا وجدت لكل قيمة للمتغير المستقل z قيمة واحدة فقط للمتغير المعتمد w، فأننا نقول ان w دالة وحيدة القيمة للمتغير z او ان $f(z)$ وحيدة القيمة. اما اذا وجدت لكل قيمة مقابلة للعدد z اكثر من قيمة لـ w، فأننا نقول ان w دالة متعددة القيم او كثيرة القيم للمتغير z. فاذا كانت $w = z^2$ فأن لكل قيمة للمتغير z قيمة واحدة فقط w، اما $w = z^{\frac{1}{2}}$ فأن لكل قيمة z توجد قيمتان لـ w .

الدوال العكسية

اذا كان $w = f(z)$، فأنه يمكن أيضاً أن نعتبر z كدالة في المتغير w وتكتب $z = g(w) = f^{-1}(w)$ وعادة تسمى الدالة f^{-1} بالدالة العكسية المناظرة للدالة f.

التحويلات

اذا كان $w(= u + iv)$ (حيث u و v حقيقيان) دالة واحدة القيمة في المتغير $z(= x + iy)$ (حيث x و y حقيقيان) فأنه يمكن ان نكتب:

$$u + iv = f(x + iy)$$

وبمساواة الجزئيين الحقيقيين والجزئيين الخيلين في الطرفين فأننا نرى أنها تكون مكافئة الى:

$$u = u(x, y) \quad , \quad v = v(x, y)$$

اذا اعطينا نقطة مثل P في المستوي z ، فأنه توجد نقطة مثل $\acute{P}$ مناظرة في المستوي w. ونقول ان النقطة P نقلت او حولت الى النقطة $\acute{P}$ باستخدام التحويل وتسمى $\acute{P}$ بصورة P.

مثال: أكتب $f(z) = z^2$ على شكل $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

الحل:

$$w = u + iv = f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

وبمساواة الجزئيين الحقيقيين والجزئيين الخيلين في الطرفين فأننا نرى:

$$u = u(x,y) = x^2 - y^2$$

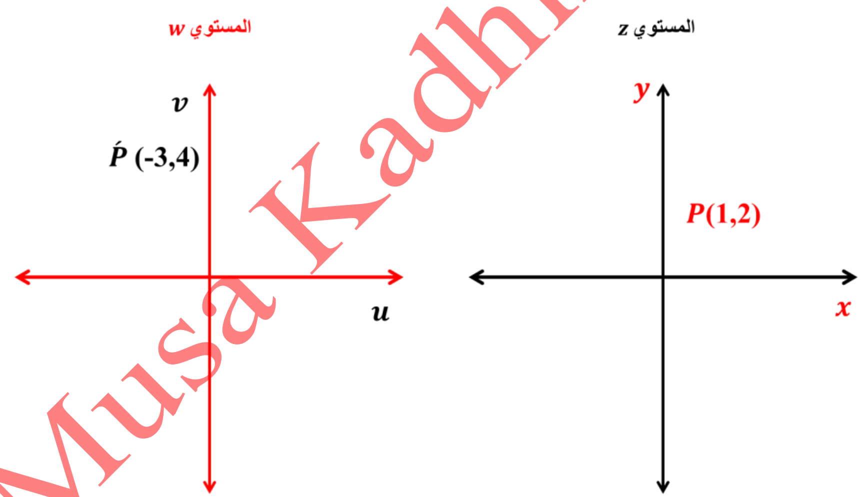
$$v = v(x,y) = 2xy$$

لنقل النقطة $(1,2)$ في المستوي العقدي z الى النقطة المناظرة لها في المستوي w:

$$u = 1^2 - 2^2 = -3$$

$$v = 2xy = 4$$

اذن تكون النقطة المناظرة في المستوي w هي $(-3,4)$وكما في الرسم التقريبي في ادناه:



مثال: لديك $w = f(z) = z^2 + 3z$، جد u و v واحسب f في $z = 1 + 3i$.

الحل:

$$u = Re\{f(z)\} = x^2 - y^2 + 3x$$

$$v = Im\{f(z)\} = 2xy + 3y$$

$$f(1+3i) = (1+3i)^2 + 3(1+3i) = 1 - 9 + 6i + 3 + 9i = -5 + 15i$$

وهكذا نرى بأن

$v(1,3) = 15$ و $u(1,3) = -5$

مثال: لديك $w = f(z) = 2zi + 6\bar{z}$، جد u و v واحسب f في $z = \frac{1}{2} + 4i$.

الحل:

$$f(z) = 2i(x+iy) + 6(x-iy)$$

$$u(x,y)) = 6x - 2y$$

$$v(x,y) = 2x - 6y$$

$$f\left(\frac{1}{2} + 4i\right) = 2i\left(\frac{1}{2} + 4i\right) + 6\left(\frac{1}{2} - 4i\right) = i - 8 + 3 - 24i = -5 - 23i$$

وهكذانرى بأن

$$u\left(\frac{1}{2}, 4\right) = -5$$

$$v\left(\frac{1}{2}, 3\right) = 23$$

مثال: اعتبر $w = f(z) = z^2$ ، اوجد قيم w المناظرة لكل من:

(أ) $z = -2 + i$ ، (ب): $z = 1 - 3i$

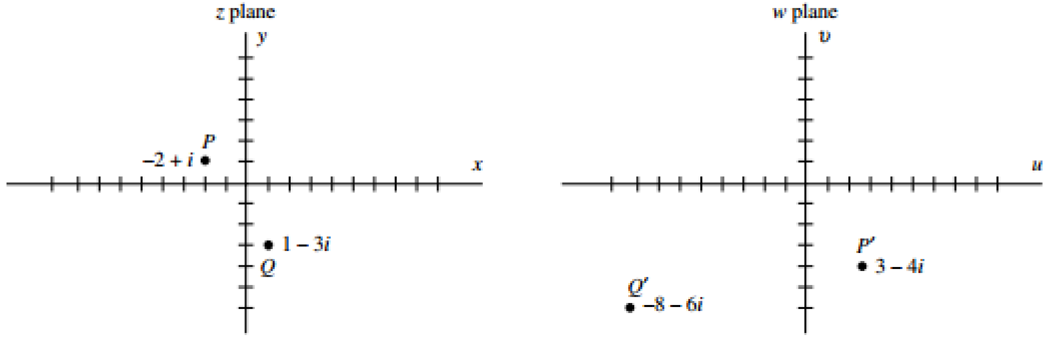
وبين كيف يمكن تمثيل هذا التناظر بيانياً. وبين كيف يمكن تمثيل هذا التناظر بيانياً.

الحل: (أ)

$$w = f(-2+i) = (-2+i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$$

(ب):

$$w = f(1-3i) = (1-3i)^2 = 1 - 6i + 9i^2 = -8 - 6i$$



النقطة $z = -2 + i$ ، الممثلة بالنقطة P في المستوي z لها صورة $w = 3 - 4i$ الممثلة بالنقطة $\acute{P}$ في المستوي w، نقول ان P قد نقلت الى $\acute{P}$ بواسطة دالة الرسم او التحويل $w = z^2$. بالمثل $z = 1 - 3i$ قد نقلت الى $w = -8 + 6i$، اذن لكل نقطة واحدة في المستوي z توجد نقطة واحدة تمثلها في المستوي w وبالتالي تكون دالة وحيدة القيمة للمتغير z.