بعض التوزيعات المتقطعة المهمة في المجال الحيوي (ثنائي الحدين، بواسون)

1- توزيع ثنائي الحدين (ذي الحدين) Binomial distribution

جاءت تسمية ثنائي الحدين بسبب وجود حالتين تدرس في ان واحد مثل (جيد) او (غير جيد) ، (مطابق) او (غير مطابق) ، (معيب) او (غير معيب) .... الخ ، فضلا عن كون دالة توزيع ثنائي الحدين ماهي الا الحد العام لمفكوك ثنائي الحدين .

- لنفرض ان هناك تجربة تكرر ب (n) من المحاولات المستقلة بحيث ان نتائج كل محاولة تتمثل بإحدى حالتين ممكنتين فقط وهي نجاح المحاولة او فشل المحاولة ، واذا فرضنا ان (p) تمثل احتمال نجاح المحاولة وان $q = 1 - p$ تمثل احتمال فشل المحاولة ، وعندئذ فان احتمال الحصول على (x) من المحاولات الناجحة حيث ان$(x \le n)$ من n من المحاولات ،ويقال ان المتغير العشوائي x يتوزع على وفق توزيع ذي الحدين (ثنائي الحدين) اذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية له بالشكل التالي :-

$$P(x) = C_x^n \, P^x q^{n-x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots , n$$
$$= 0 \quad , \quad o.w \quad \text{عدا ذلك}$$

حيث ان : $0 < p < 1 \;,\; q = 1-p$

ان كلا من n , p تسمى معلمات التوزيع ، ولغرض الترميز يعبر عن توزيع ثنائي الحدين بالشكل التالي :-

$$X \sim b\,(n,p)$$

على سبيل المثال لو قلنا ان $X \sim b\,(10,0.6)$ وهذا يعني ان $p = 0.6$, $n = 10$

ويمكن حساب بعض المقاييس الخاصة بهذا التوزيع وهي:

1- الوسط الحسابي لقيم X هو np
2- التباين لقيم X هو npq
3- الانحراف المعياري لقيم X هو $\sqrt{npq}$

مثال : افرض ان $X \sim b\,(10,0.6)$ جد ما يلي :

1- دالة الكتلة الاحتمالية لـ (X).
2- احسب الوسط الحسابي والتباين لـ (X)
3- جد قيمة ما يلي : $P(X = 5)$, $P(X \le 2)$, $P(X > 8)$, $P(X \ge 8)$, $P(X < 2)$,

الحل :

من معطيات السؤال نجد ان معلمات التوزيع هي $n = 10$, $p = 0.6$

1- دالة الكتلة الاحتمالية تكون بالصورة التالية :

$P(x) = C_x^n \; P^x q^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$

$P(x) = C_x^{10} \; (0.6)^x (0.4)^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$ $p=0.6$, $q=1-0.6=0.4$

2- الوسط الحسابي $\mu = n \cdot p = (10)(0.6) = 6$

التباين $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = (10)(0.6)(0.4) = 2.4$

3-

- **$P(x=5) = C_5^{10} \; (0.6)^5 (0.4)^{10-5}$**

  $= \frac{10!}{(10-5)!(5)!}(0.6)^5 (0.4)^5 = \frac{3628800}{(120)(120)}(0.07776)(0.01024)$

  $= (252)(0.000796) = 0.200592 \cong 0.2$

- **$P(x \le 2) = p(x=2) + p(x=1) + p(x=0)$**

  $= C_2^{10} \; (0.6)^2 (0.4)^{10-2} + C_1^{10} \; (0.6)^1 (0.4)^{10-1} + C_0^{10} \; (0.6)^0 (0.4)^{10-0}$

  $= 0.01062 + 0.00157 + 0.001048 = 0.01324 \cong 0.01$

- **$P(x>8) = p(x=9) + p(x=10)$**

  $= C_9^{10} \; (0.6)^9 (0.4)^{10-9} + C_{10}^{10} \; (0.6)^{10} (0.4)^{10-10}$

  $= 0.04031 + 0.06046 = 0.10077 \cong 0.1$

- **$P(X \ge 8) = p(x=8) + p(x=9) + p(x=10)$**

  $= C_8^{10} (0.6)^8 (0.4)^{10-8} + C_9^{10} \; (0.6)^9 (0.4)^{10-9} + C_{10}^{10} \; (0.6)^{10} (0.4)^{10-10}$

  $= 0.12093 + 0.04031 + 0.06046 = 0.2217$

  $\cong 0.22$

- **$P(X < 2) = p(x=1) + p(x=0)$**

  $= C_1^{10} \; (0.6)^1 (0.4)^{10-1} + C_0^{10} \; (0.6)^0 (0.4)^{10-0}$

  $= 0.00157 + 0.001048$

  $= 0.00262$

توزيع بواسون : Poisson distribution

يعد توزيع بواسون من التوزيعات المتقطعة المهمة جدا في الكثير من التطبيقات الاحصائية ويطلق عليه في بعض الاحيان توزيع الحوادث النادرة الحصول ، مثال على ذلك عدد الوحدات المعيبة في انتاج كبير

لمصنع معين وكذلك عدد النداءات الهاتفية المستلمة من قبل بدالة هاتف خلال فترة زمنية محددة .
وسمي هذا التوزيع بأسم العالم الرياضي الفرنسي Simon D. Poisson (1840-1781)

- يقال ان المتغير العشوائي (x) يتوزع على وفق دالة توزيع بواسون اذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية لهذا المتغير لها الشكل التالي :

$$P(x) = \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \lambda>0 \quad , \quad e = 2.71828$$

$$= 0 \qquad \text{o.w} \quad \text{عدا ذلك}$$

حيث (λ) Lambda تمثل معلمة التوزيع ويمكن التعبير عن هذا التوزيع بالصيغة او الرموز التالية :

$$X \sim P_o(\lambda)$$

- ويتم تشخيص التوزيع من خلال تحديد قيمة معلمة التوزيع (λ)
- يعد توزيع بواسون حالة خاصة من توزيع ثنائي الحدين عندما يكون احتمال نجاح المحاولة (p) صغير جدا اي يقترب من الصفر وان عدد المحاولات كبيرة جدا (نظريا يقترب من ما لانهاية ∞) بحيث ان np وتبعا للشرطين المذكورين تستقر نحو عدد ثابت من (λ) معلمة توزيع بواسون *
- ويمكن حساب بعض المقاييس الخاصة بهذا التوزيع وهي

1- الوسط الحسابي لقيم x هو (λ)
2- التباين لقيم x هو (λ)
3- الانحراف المعياري لقيم x هو $\sqrt{\lambda}$

مثال1 :

اذا كان $X \sim P_o(5)$ جد ما يلي :

1- دالة الكتلة الاحتمالية للتوزيع ؟
2- تباين التوزيع والوسط الحسابي
3- احتمال ان x=0

الحل : معلمة التوزيع هي λ= 5

1- $P(x) = \frac{5^{x} e^{-5}}{x!} \quad ; \quad x = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots$

2- $\sigma^2 = \lambda = 5$ التباين ; $\mu_x = \lambda = 5$ الوسط الحسابي

3- $P(x=0) = \frac{5^{0} e^{-5}}{0!} = e^{-5} = 0.00674$

مثال2: من خلال مراقبة احدى البدالات في احد المستشفيات تبين انها تستقبل (6) نداءات هاتفية بالمتوسط خلال فترة ساعة واحدة ، ماهو احتمال ان هذه البدالة وخلال فترة ساعة واحدة سوف تستقبل:

1- على الاكثر ثلاث نداءات 2- اربعة نداءات 3- على الاقل ندائيين

الحل : واضح ان دالة التوزيع هي بواسون بمعلمة توزيع $\lambda = 6$ ولذلك فان احتمال ان تستقبل هذه البدالة x من النداءات خلال فترة ساعة واحدة هو :

$$P(x) = \frac{6^x e^{-6}}{x!} \quad ; \quad x = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots$$

وبالتالي فأن :

1- احتمال استقبال ثلاث نداءات على الاكثر

$$P(x \le 3) = p(0)+p(1)+p(2)+p(3)$$

$$= \frac{6^0 e^{-6}}{0!} + \frac{6^1 e^{-6}}{1!} + \frac{6^2 e^{-6}}{2!} + \frac{6^3 e^{-6}}{3!}$$

$$= e^{-6} + 6e^{-6} + 18e^{-6} + 36e^{-6} = 61e^{-6} = 0.15$$

2- احتمال استقبال اربعة نداءات فقط

$$P(x = 4) = \frac{6^4 e^{-6}}{4!} = \frac{1296 * 0.002478}{24} = 0.1338$$

3- احتمال استقبال على الاقل ندائيين

$$P(x \ge 2) = 1 - p(x<2)$$

$$= 1 - [p(0) + p(1)]$$

$$= 1 - [e^{-6} + 6e^{-6}] = 0.9827$$

مثال 3 : اذا علمت ان $X \sim P_o(4)$ ،جد الوسط الحسابي والتباين ثم احسب الاحتمالات التالية:

$P(x \le 2)$, $p(x>1)$, $p(x=3)$, $p(1 \le x \le 3)$

الحل: بما ان $\lambda = 4$ اذن الوسط الحسابي والتباين هما

الوسط الحسابي $\mu_x = \lambda = 4$; التباين $\sigma^2 = \lambda = 4$

اما القيم الاحتمالية فهي :

- $p(1 \le x \le 3) = p(1)+p(2)+p(3)$

$= 4e^{-4} + 8e^{-4} + 10.667e^{-4}$

$= 22.667 e^{-4} = 0.41515$

- $p(x=3) = p(3) = 10.667e^{-4} = 0.1954$
- $p(x>1) = 1 - p(x \leq 1)$

  $= 1 - [p(0) + p(1)]$

  $= 1 - [e^{-4} + 4e^{-4}]$

  $= 1 - e^{-4} \quad = 0.9084$
- $p(x \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2)$

  $= e^{-4} + 4e^{-4} + 8e^{-4}$

  $= 13e^{-4}$

  $= 0.238$